

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 4x - 4} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x + 5} - 3}{x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{-3x + 1}} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{-x + 2} - 2}{x + 2}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
- 3) a) Montrer que $\forall x \in D_f$ on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & \text{si } x > 3 \\ \frac{x^2-x-2}{-x+4} & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$

- 1) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 3[$ et $]3, +\infty[$
- 2) Etudier la continuité de f en 3
- 3) En déduire le domaine de continuité de f .

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-2x+6}-2}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2-x-1}{2x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- 1) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$
- 2) Etudier la continuité de f en 1

3) En déduire le domaine de continuité de f

Exercice 5

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_g de g .

b) Montrer que g est continue sur $[-4, +\infty[$

c) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

b) Montrer que $\forall x \in D_f$ on a : $f(x) = g(x)$

c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction prolongée F de f en 0.

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{si } x \in [-4, +\infty[\setminus\{0\} \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2+5x+4}{x+4} + a & \text{si } x \in]-\infty, -4[\end{cases}$

a) Etudier la continuité de h en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -4^-} h(x) = a - 3$

c) Pour quelle valeur de a ; h est-elle continue en -4 ?

4) On prend $a = 1$. Déterminer le domaine de continuité de h

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{8} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

b) Etudier la continuité de f en 0.

2) a) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 4]$

- b) Montrer que $f(4)$ est un minimum de f sur $]-\infty, 4]$
- c) Montrer que f est bornée sur $]-\infty, 4]$
- 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = -x + 2$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$
- b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

4) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{-x^3 + 3x^2 - x - 1}{x - 1} & \text{si } x \in [0, +\infty[\setminus \{1\} \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- a) Étudier la continuité de g en 0. La fonction g est-elle continue en 0 ?
- b) Déterminer a pour que g soit continue en 1
- c) On prend $a = 2$. Déterminer le domaine de continuité de g . (expliquer)

