Exercice n°1

1. Soit la fonction f définie sur $[-8,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.
   Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et déterminer son prolongement.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3,-1\}$ par $g(x)=\dfrac{|x+2|-1}{x^2+4x+3}$.
   Déterminer $\lim\limits_{x\to-3} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$.
3. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3} & \text{si } x\neq 3 \\ h(3)=\dfrac{3}{4} \end{cases}$
   La fonction h est-elle continue en 3 ?
4. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\begin{cases} k(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2} & \text{si } x<2 \\ k(x)=\sqrt{x^2+5}+mx & \text{si } x\geqslant 2 \end{cases}$$ où m est un paramètre réel.
   Déterminer la valeur de m pour que k soit continue en 2.

Exercice n°2

1. Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x|x-1|}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$.
   (c) g est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
2. Soit f la fonction définie sur $[-3,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=g(x) & \text{si } x\in]1,+\infty[\\ f(x)=\dfrac{x-1}{-2+\sqrt{x+3}} & \text{si } x\in[-3,1[\\ f(1)=4 \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue en 1.
   (b) Montrer que f est continue sur $[-3,+\infty[$.

Exercice n°3

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1} & \text{si } x\in]-\infty,-1[\\ f(x)=\dfrac{|x|}{2}+\dfrac{1}{2} & \text{si } x\in[-1,0] \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x\in]0,+\infty[\end{cases}$

   Etudier la continuité de f en 0 et en -1.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^3+x}{2x} & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ g(x)=\dfrac{1}{2} & \text{si } x=0 \\ g(x)=f(x) & \text{si } x\in]0,+\infty[\end{cases}$

   (a) Montrer que g est continue en 0.

   (b) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que l'équation $g(x)=\dfrac{x}{4}$ admet dans $]1,2[$ au moins une solution α.

Exercice n°4

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{2(x+1)} & \text{si } x\in]-\infty,-1[\\ f(x)=(m-1)x^3+(5-m^2)x+1 & \text{si } x\in[-1,0] \\ f(x)=\dfrac{x}{4\left(\sqrt{x+4}-2\right)} & \text{si } x\in]0,+\infty[\end{cases}$ où m est un paramètre réel.

   (a) Montrer que pour tout $m\in\mathbb{R}$, f est continue en 0.

   (b) Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en -1.

   la suite on prend $\mathbf{m}=2$.

2. (a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-1,0[$ au moins une solution α.

   (b) Vérifier que $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha}=-1$.

   (c) Montrer que pour tout $x\in]-1,0[$ on a : $f(x)=(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

3. Soit g la fonction définie sur $]-1,0[\setminus\{\alpha\}$ par $g(x)=\dfrac{x^3+x+1}{x-\alpha}$.

   Montrer que g est prolongeable par continuité en α et déterminer son prolongement.