Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{3x^2-4x-4}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{2x^2-x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{2-\sqrt{-3x+1}}$ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{-x+2}-2}{x+2}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

3) **a)** Montrer que $\forall x \in D_f$ on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & si \;\; x > 3 \\ \frac{x^2-x-2}{-x+4} & si \;\; x \leq 3 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,,3[$ et $]3\,,+\infty[$

2) Etudier la continuité de f en 3

3) En déduire le domaine de continuité de f.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{-2x+6}-2}{x-1} & si \;\; x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2-x-1}{2x+1} & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$

2) Etudier la continuité de f en 1

3) En déduire le domaine de continuité de f

Exercice 5

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$

1) **a)** Déterminer le domaine de définition D_g de g.

b) Montrer que g est continue sur $[-4\,,+\infty[$

c) Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Montrer que $\forall\, x \in D_f$ on a : $f(x) = g(x)$

c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction prolongée F de f en 0.

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & si\ \ x \in [-4\,,+\infty[\backslash\{0\} \\ \frac{1}{4} & si\ \ x = 0 \\ \frac{x^2+5x+4}{x+4} + a & si\ x \in\ ]-\infty\,,-4[\end{cases}$

a) Etudier la continuité de h en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-4^-} h(x) = a - 3$

c) Pour quelle valeur de a ; h est-elle continue en -4 ?

4) On prend $= 1$. Déterminer le domaine de continuité de h

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-x+4}-2}{2x} & si\ x \neq 0 \\ -\frac{1}{8} & si\ \ x = 0 \end{cases}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Etudier la continuité de f en 0.

2) a) Montrer que f est continue sur $]-\infty\,,4]$

b) Montrer que $f(4)$ est un minimum de f sur $]-\infty\,,4]$

c) Montrer que f est bornée sur $]-\infty\,,4]$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = -x + 2$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,,3\right]$

b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in\ ]-\infty\,,0[\\ \dfrac{-x^3+3x^2-x-1}{x-1} & si\ \ x \in [0\,,+\infty[\ \backslash\{1\} \\ a & si\quad x \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de g en 0. La fonction g est-elle continue en 0 ?

b) Déterminer a pour que g soit continue en 1

c) On prend $a = 2$. Déterminer le domaine de continuité de g. (expliquer)