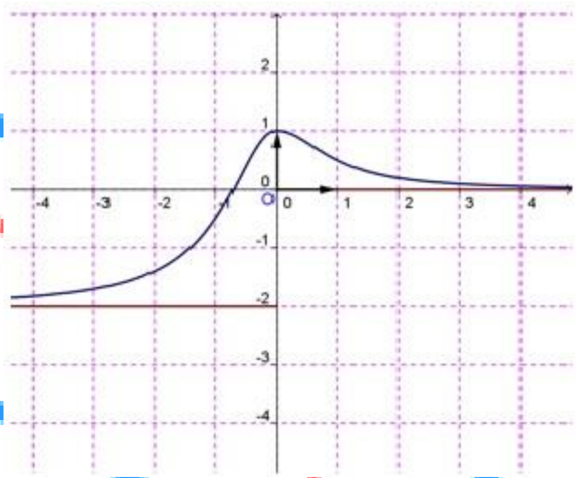
Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.



1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) **a)** Préciser l'extremum de f.

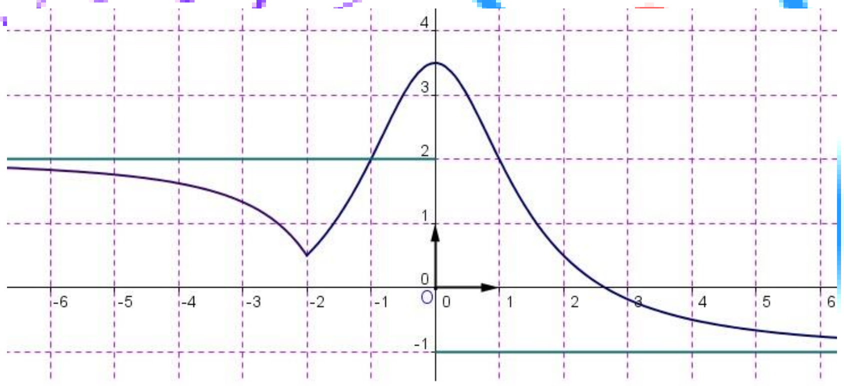
b) Donner un minorant de f.

c) En déduire que f est bornée.

4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 2

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f



1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Déterminer graphiquement

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) **a)** Donner le maximum de f.

b) Donner un minorant de f.

c) En déduire que f est bornée.

4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-4}$

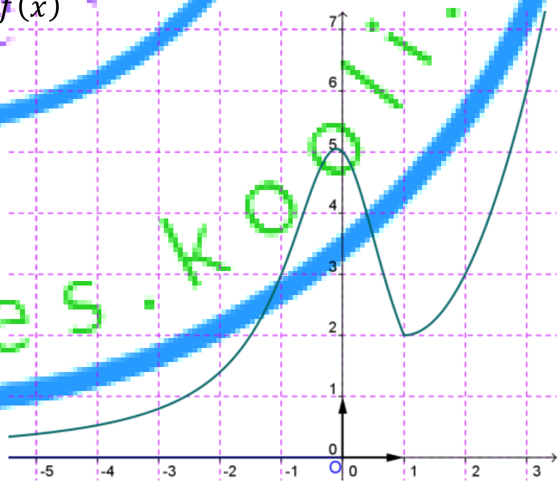
1) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

b) Interpréter les résultats graphiquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 4

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f



1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-3x^2+2}{x^2-1} & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} & si \quad x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

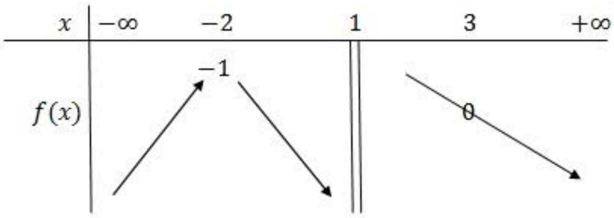
On admet que la fonction f est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse, aucune justification n'est demandée.

Exercice 6

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f.

1) Donner le domaine de définition de f.



2) a) On admet que :

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=0$

* $\forall\, x \in\,]-\infty\,,2[$ on a : $f(x) < x+2$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Interpréter graphiquement ces résultats.

b) La courbe représentative de f possède une asymptote verticale en 1.

Donner $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

c) Compléter le tableau de variation de f

3) Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

4) Tracer une courbe possible représentant f.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+x+1} & si \quad x<0 \\ 5x^2-5x+1 & si \quad 0\le x\le 1 \\ 3x-\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & si \quad x>1 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue en 0 et en 1.

2) **a)** Vérifier que $\forall x \in [0\,,1]$ on a : : $f(x)=5\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

b) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}\,,1\right]$

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0\,,1]$ exactement deux solutions α et β.

3) Montrer que (C_f) admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, dont-on précisera une équation.

4) **a)** Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique Δ dont-on une équation est : $y=3x-1$.

b) Déterminer la position de (C_f) par rapport à Δ sur $]1\,,+\infty[$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^3+2x^2+3x-2}{x^2+3}$ et C_f sa courbe représentative

1) Déterminer le domaine de définition de f

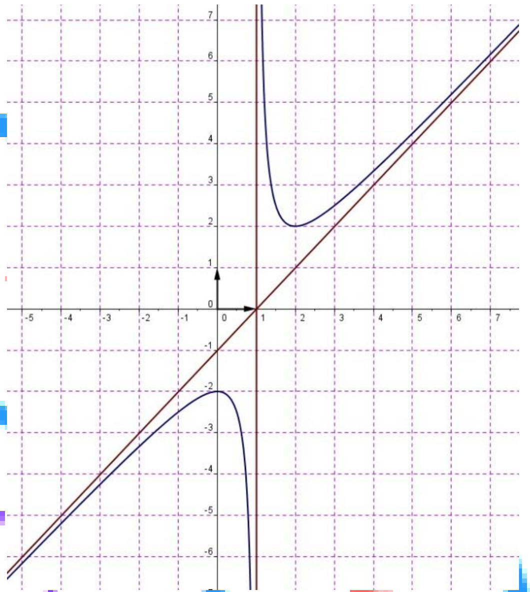
2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) **a)** Déterminer trois réels a ; b ; et c tel que $f(x) = ax + b\frac{c}{x^2+3}$

b) En déduire que C_f admet une asymptote Δ que l'on précisera

c) Etudier la position relative de C_f et Δ

Exercice 9



I) On donne ci-contre la courbe (C_f) d'une fonction f.

Les droites Δ: $y = x - 1$ et $\Delta' : x = 1$ sont des asymptote à (C_f).

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer graphiquement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x + 1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x + 1)$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$; $m \in \mathbb{R}$.

4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x - 1$

5) Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(2)$.

II) Dans cette partie on suppose que : $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ où a et b sont des réels

1) **a)** Déterminer a et b

b) Etudier la parité de f

c) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x

2) **a)** Soit la fonction h définie par $h(x) = |f(x)|$, déduire (C_h) à partir de (C_f)

b) Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$ déterminer le domaine de définition de g.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x + 2 + \sqrt{x^2+5} & si \quad x < 2 \\ \frac{x^2+x+1}{x-1} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

1) **a)** Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite Δ: $x - y + 2 = 0$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

c) En déduire une valeur approchée de $f(2013)$.

3) **a)** Montrer que pour tout $\forall x \in]-\infty, 0[$ on a : $f(x) = \frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}$ En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\frac{1-3x}{x-3} & si \quad x<1\\ \sqrt{x^2+3}+x-2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x+2)$

3) Montrer que la droite $\Delta : y=2x-2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f)

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}+1 & si \quad x<0\\ \frac{x^2+4x+1}{x+1} & si \quad x\geq 0\end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

3) **a)** Déterminer trois réels a ; b et c tel que $\forall x\in[0,+\infty[$ on a : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on précisera.

Exercice 13

1) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\sqrt{x^2+x-2}-x$ et soit C_g sa courbe représentative

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c) Montrer que pour tout $x\geq 1$ on a : $g(x)=\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}$

d) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et interpreter le résultat graphiquement

e) Montrer que la droite Δ: $y=-2x-\frac{1}{2}$ est une asymptote à C_g au voisinage de $-\infty$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases}\frac{x^2+3(m-1)x-3m+2}{x-1} & \text{si } x<1\\ \frac{g(x)}{x-2} & \text{si } x\geq 1 \text{ et } x\neq 2\\ f(2)=\frac{1}{4}\end{cases}$

a) Montrer que f est continue en 2

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=3m-1$

c) Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 1

3) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{4}$ admet dans $[1,2]$ au moins une solution α