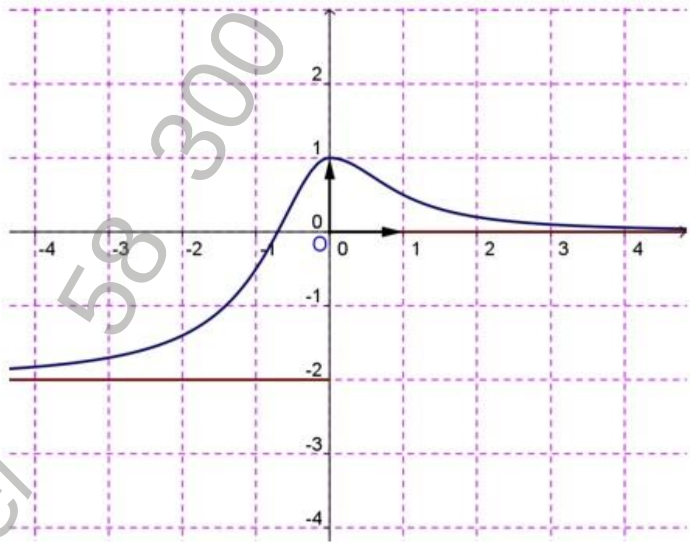
Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.



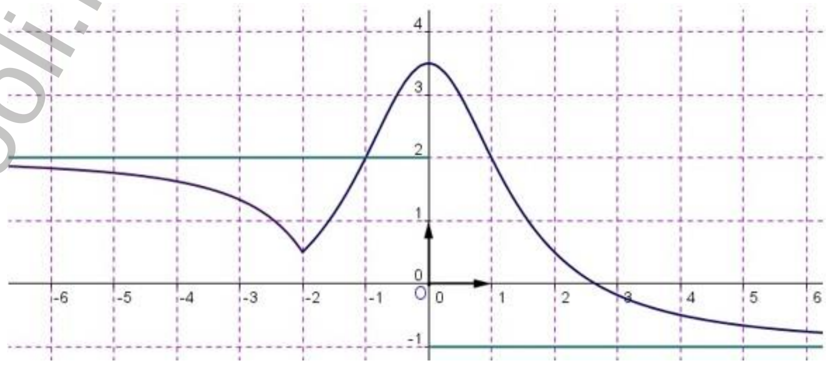
1) **Déterminer le domaine de définition de f**
2) **Déterminer graphiquement**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) a) **Préciser l'extremum de f.**
   b) **Donner un minorant de f.**
   c) **En déduire que f est bornée.**
4) **Dresser le tableau de variation de f.**

Exercice 2

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f



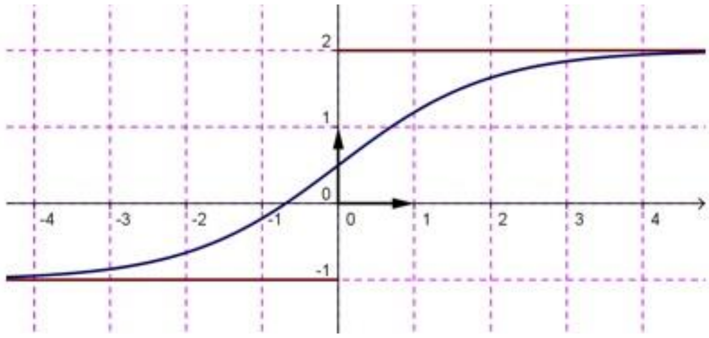
1) **Déterminer le domaine de définition de f**
2) **Déterminer graphiquement**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) a) **Donner le maximum de f.**
   b) **Donner un minorant de f.**
   c) **En déduire que f est bornée.**
4) **Dresser le tableau de variation de f.**

Exercice 3

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f



1) **Déterminer le domaine de définition de f**
2) a) **Donner un minorant et un majorant de f**
   b) **En déduire que f est bornée.**
3) **Déterminer graphiquement :**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

4) **Dresser le tableau de variation de f**

Exercice 4

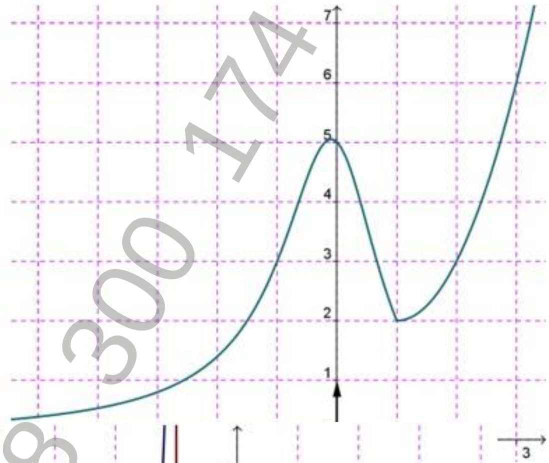
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 3}$

1) **Déterminer le domaine de définition de f**
2) a) **Déterminer trois réels a, b et c tel que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2 + 3}$**
   b) **En déduire que (C) admet une asymptote oblique D que l'on précisera.**

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

c) Etudier la position de (C) et D

Exercice 5



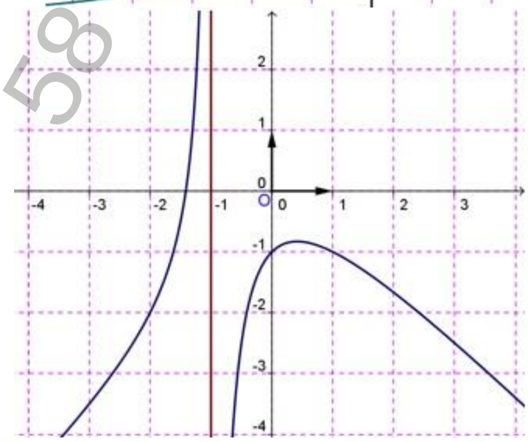
On donne ci-contre la courbe d'une fonction f

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Déterminer graphiquement

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 6



On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.

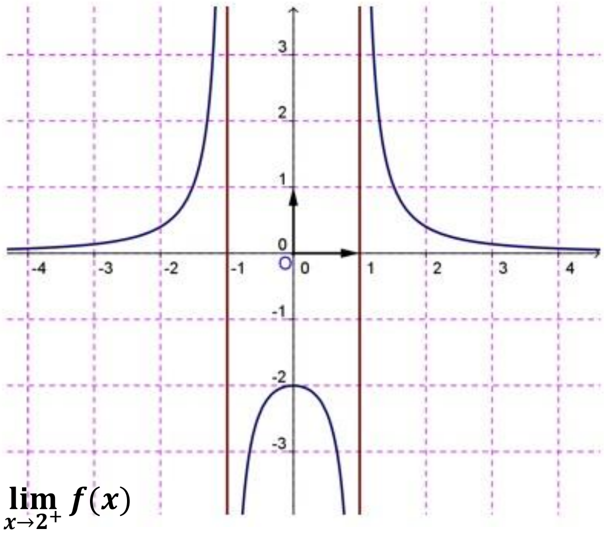
1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer graphiquement

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 7



On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer graphiquement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Dresser le tableau de variation de f

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-4}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

b) Interpréter les résultats graphiquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-3x^2+2}{x^2-1} & si \quad x \le 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}} & si \quad x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On admet que la fonction f est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse, aucune justification n'est demandée.

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

2) La fonction f est continue en 0.

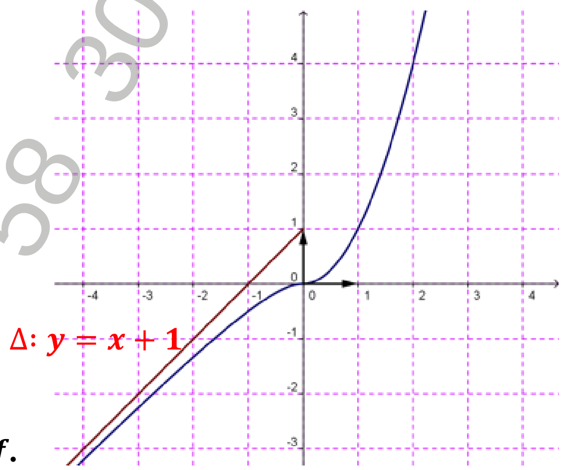
3) La limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

4) L'image de l'intervalle $[0\,,3]$ par f est l'intervalle $[-3\,,-2]$.

5) L'équation $f(x)=1$ admet dans l'intervalle $[0\,,3]$ une unique solution.

Exercice 10

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f, la droite Δ: $y=x+1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.



1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer graphiquement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x)-(x+1)\big)$

Exercice 11

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$		↗	-1	↘	‖	↘	0	↘	

1) Donner le domaine de définition de f.

2) a) On admet que :

$*\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+2))=0$

$*\ \forall\, x\in\,]-\infty\,,2[\quad f(x)<x+2$

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

Interpréter graphiquement ces résultats.

b) La courbe représentative de f possède une asymptote verticale en 1.

Donner $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

c) Compléter le tableau

3) Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

4) Tracer une courbe possible représentant f.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2+x+1} & si\quad x<0\\ 5x^2-5x+1 & si\quad 0\le x\le 1\\ 3x-\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & si\quad x>1\end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue en 0 et en 1.

2) a) Vérifier que $\forall x\in[0\,,1]$, on a : $f(x)=5\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

58 300 174
http://mathematiques.kooli.me/

b) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$ *et* $\left[\frac{1}{2}\,,1\right]$

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0\,,1]$ exactement deux solutions α et β.

3) Montrer que (C_f) admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, dont-on précisera une équation.

4) a) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique Δ dont-on une équation est : $y=3x-1$.

b) Déterminer la position de (C_f) par rapport à Δ sur $]1\,,+\infty[$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} x+2+\sqrt{x^2+5} & si \quad x<2 \\ \dfrac{x^2+x+1}{x-1} & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

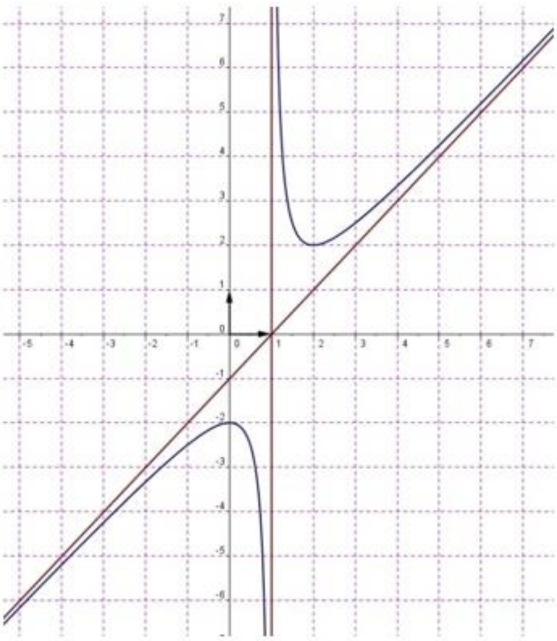
b) Montrer que la droite Δ: $x-y+2=0$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

c) En déduire une valeur approchée de $f(2013)$.

3) a) Montrer que $\forall x\in\,]-\infty\,,0[\,;\ f(x)=\dfrac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice 14



I) On donne ci-contre la courbe (C_f) d'une fonction f.
Les droites Δ: $y=x-1$ et Δ' : $x=1$ sont des asymptote à (C_f).

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer graphiquement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x)-(x-1)\big)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)-(x-1)\big)$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $f(x)=m$; $m\in\mathbb{R}$.

4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=x-1$

5) Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(2)$.

II) Dans cette partie on suppose que :

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

$f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x-1}$ où a et b sont des réels

1) a) Déterminer a et b

b) Etudier la parité de f

c) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x

2) a) Soit la fonction h définie par $h(x) = |f(x)|$, déduire (C_h) à partir de (C_f)

b) Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$ déterminer le domaine de définition de g.

Exercice 15

Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = -\sqrt{-x-1} \text{ si } x \leq -1 \\ f(x) = \frac{3x-1}{x+1} \quad \text{si } -1 < x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+3} + mx \quad \text{si } x > 1 \end{cases}$; $m \in \mathbb{R}$

et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Etudier la continuité de f en (-1).

2) Déterminer le réel m pour que f soit continue en 1.

3) Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble de continuité de f.

4) On prend $m = -2$ calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble de continuité de f.

4) On prend $m = -2$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Montrer que la droite Δ: $y = -x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier la position relative de C_f et Δ.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1-3x}{x-3} & si \quad x < 1 \\ \sqrt{x^2+3} + x - 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x + 2)$

3) Montrer que la droite Δ : $y = 2x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f)

58 300 174
http://mathematiques.kooli.me/

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}+1 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2+4x+1}{x+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Déterminer trois réels a, b et c tel que $\forall x \in [0\,,+\infty[\,; f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$

En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on précisera.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-5\,,1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2+4x-5} & si \quad x \leq 2 \\ \sqrt{x^2+5}-2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Justifier la réponse.

b) Montrer que f est continue en 2.

c) Prouver que f est continue sur $]-\infty\,,2]\backslash\{-5\,,1\}$ et sur $]2\,,+\infty[$

2) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution α α dans l'intervalle $]3\,,4[$.

3) a) Justifier que la droite d'équation $x = -5$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

b) Vérifier que pour tout $]-\infty\,,2]\backslash\{-5\,,1\}$, on a : $f(x) = x - 4 + \frac{21x-21}{x^2+4x-5}$

c) En déduire que C_f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera.

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + 2 = 0$ puis interpréter graphiquement cette limite.

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174