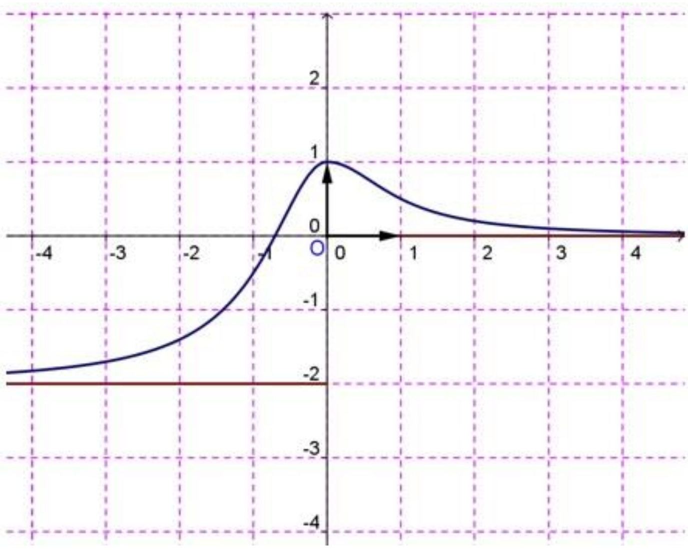
Limites et comportements asymptotiques **3ème Sc Expérimentales**

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

Exercice 1

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.



1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Déterminer graphiquement

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) a) Préciser l'extremum de f.

b) Donner un minorant de f.

c) En déduire que f est bornée.

4) Dresser le tableau de variation de f.

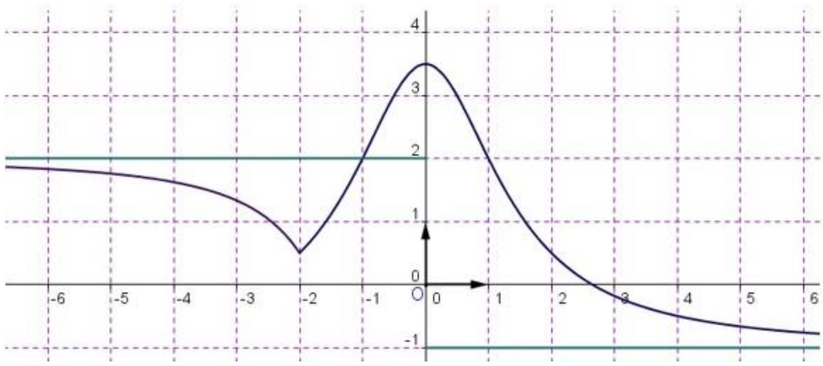
Exercice 2

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Déterminer graphiquement

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



3) a) Donner le maximum de f.

b) Donner un minorant de f.

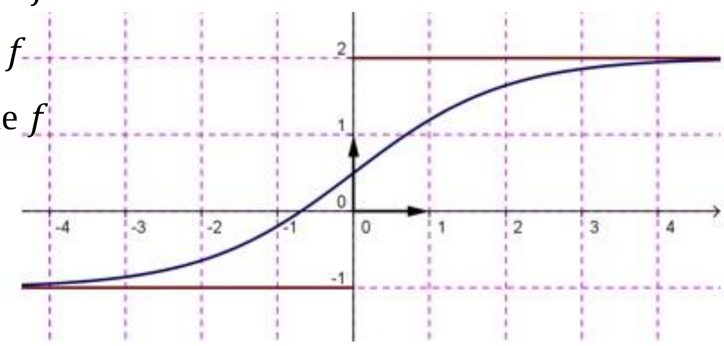
c) En déduire que f est bornée.

4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f

1) Déterminer le domaine de définition de f



2) a) Donner un minorant et un majorant de f

b) En déduire que f est bornée.

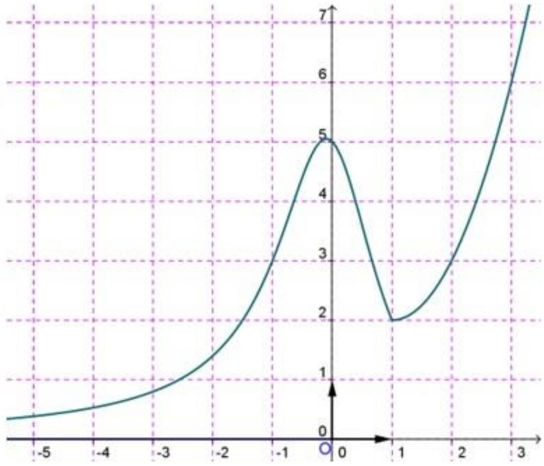
3) Déterminer graphiquement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) Dresser le tableau de variation de f

Exercice 4

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f



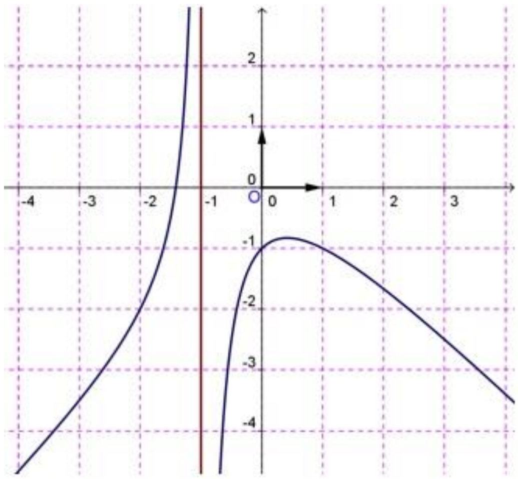
1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Déterminer graphiquement

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 5

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.



1) Déterminer le domaine de définition de f.

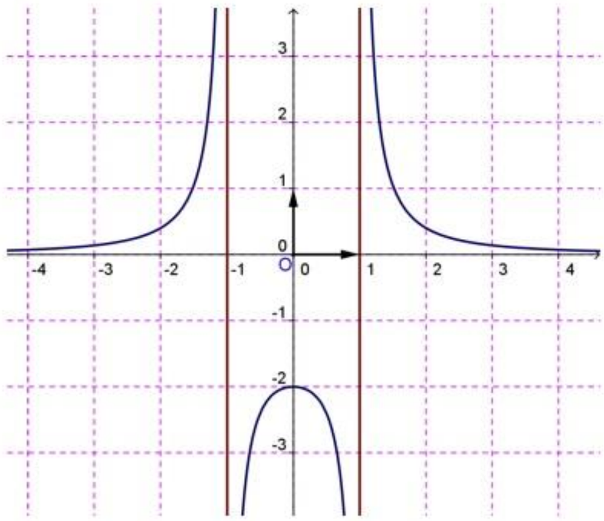
2) Déterminer graphiquement

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 6

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.



1) Déterminer le domaine de définition de f.

1) Déterminer graphiquement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Dresser le tableau de variation de f

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-4}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

b) Interpréter les résultats graphiquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+3x-2}{x^2+3}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) a) Déterminer trois réels a, b et c tel que $\forall x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2+3}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique D que l'on précisera.

c) Etudier la position de (C) et D

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-3x^2+2}{x^2-1} & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}} & si \quad x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On admet que la fonction f est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse, aucune justification n'est demandée.

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction f est continue en 0.

3) La limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

4) L'image de l'intervalle $[0\,,3]$ par f est l'intervalle $[-3\,,-2]$.

5) L'équation $f(x) = 1$ admet dans l'intervalle $[0\,,3]$ une unique solution.

Exercice 10

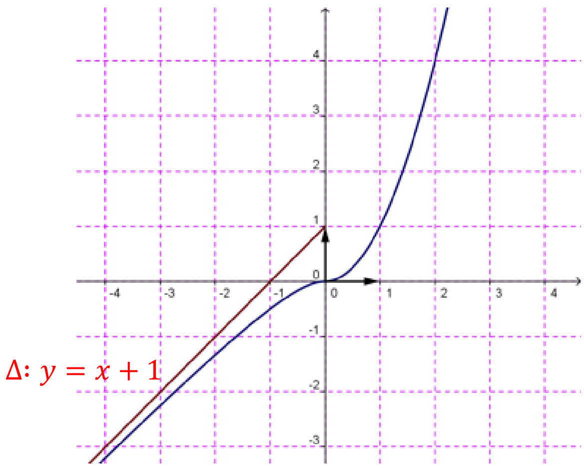
On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f, la droite Δ: $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer graphiquement :

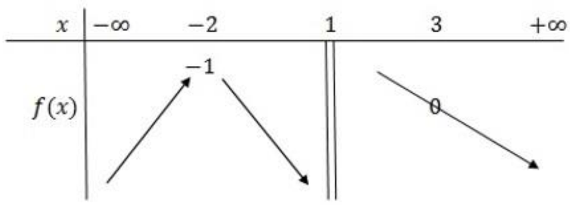
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (x+1)\big)$



Exercice 11

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f.



1) Donner le domaine de définition de f.

2) a) On admet que :

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$

$* \quad \forall\, x \in \left]-\infty\,,2\right[\quad f(x) < x+2$

$* \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

Interpréter graphiquement ces résultats.

b) La courbe représentative de f possède une asymptote verticale en 1.

Donner $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

c) Compléter le tableau

3) Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

4) Tracer une courbe possible représentant f.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x+\sqrt{x^2+x+1} & si \quad x<0 \\ 5x^2-5x+1 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 3x - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & si \quad x>1 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue en 0 et en 1.

2) a) Vérifier que $\forall x \in [0\,,1]$, on a : $f(x) = 5\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$

b) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $\left[0\,,\dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{2}\,,1\right]$

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0\,,1]$ exactement deux solutions α et β.

3) Montrer que (C_f) admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, dont-on précisera une équation.

4) a) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique Δ dont-on une équation est : $y = 3x-1$.

b) Déterminer la position de (C_f) par rapport à Δ sur $\left]1\,,+\infty\right[$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x+2+\sqrt{x^2+5} & si \quad x<2 \\ \dfrac{x^2+x+1}{x-1} & si \quad x \ge 2 \end{cases}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite Δ: $x - y + 2 = 0$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

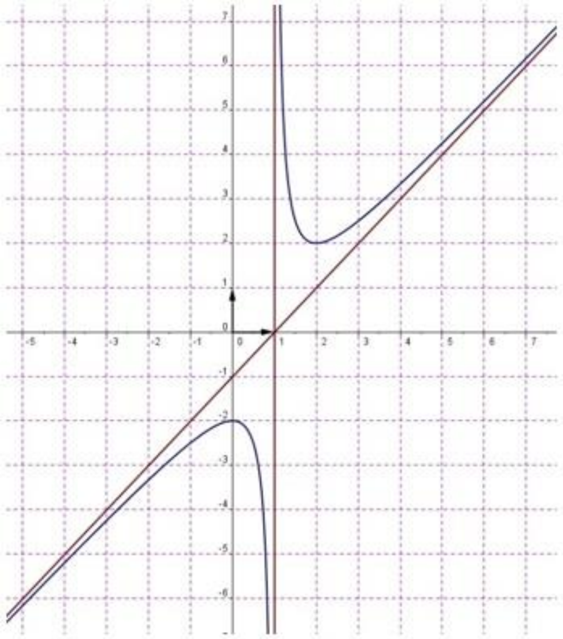
c) En déduire une valeur approchée de $f(2013)$.

3) a) Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[$; $f(x) = \dfrac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice 14

I) On donne ci-contre la courbe (C_f) d'une fonction f.



Les droites Δ: $y = x - 1$ et Δ' : $x = 1$ sont des asymptote à (C_f).

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer graphiquement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - (x-1)\big)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x-1)\big)$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$; $m \in \mathbb{R}$.

4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x - 1$

5) Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(2)$.

II) Dans cette partie on suppose que :

$f(x) = \dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ où a et b sont des réels

1) a) Déterminer a et b

b) Etudier la parité de f

c) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x

2) a) Soit la fonction h définie par $h(x) = |f(x)|$, déduire (C_h) à partir de (C_f)

b) Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$ déterminer le domaine de définition de g.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1-3x}{x-3} & si \quad x < 1 \\ \sqrt{x^2+3} + x - 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x + 2)$
3) Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f)

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x} + 1 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter le résultat graphiquement.
3) a) Déterminer trois réels a, b et c tel que $\forall x \in [0\,,+\infty[\,; f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$

En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on précisera.