# Lycée 18 Janvier Djebniana

## Série N°12

## Thème : Limites et Comportements asymptotiques

| Niveau : Troisième Maths | Année Scolaire : 2023-2024 |
|---|---|

Prof : BenMbarek Mahmoud

### Exercice 1 ★★★

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\left|x^2+x\right|}{x^2-4} & \text{si } x\leqslant 0 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-2x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Etudier la continuité de $f$ en $0$.
2. Etudier la limite de $f$ en $(-2)$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.
4. Déterminer la position relative de $\Delta$ et $\mathscr{C}_f$ sur $]0;+\infty[$.

### Exercice 2 ★★★

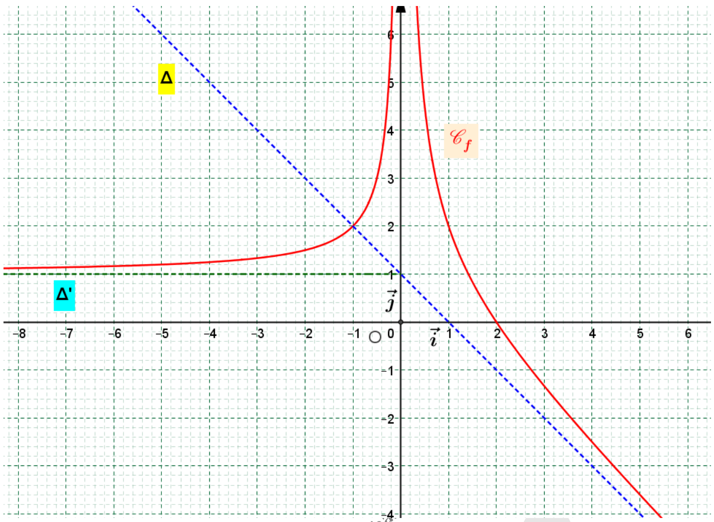
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+7}+x-1}{x+3} & \text{si } x<-3 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{-x^2+x+2} & \text{si } -3\leqslant x<2 \\ f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1} & \end{cases}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Etudier la continuité de $f$ en $(-3)$ et $2$.
2. Etudier la limite de $f$ en $(-1)$. Interpréter le résultat graphiquement.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.
4. 
   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b. Montrer que pour tout $x\in[2;+\infty[$, on a : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ avec $a$, $b$ et $c$ trois réels à préciser.
   c. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique $\Delta$.
   d. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ avec $\Delta$ sur $[2;+\infty[$.

## Exercice 3 ★★★

Le graphique ci-contre représente la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $\Delta$, $\Delta'$ et l'axe des abscisses sont des asymptotes à $\mathscr{C}_f$ .




1. Déterminer l'esnsemble de définition de $f$.
2. a) $f$ admet-elle une limite en $(-1)$ ?
   b) $f$ admet-elle une limite en $0$ ?
3. Déterminer l'image de chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;0[$ et $]0\,;3[$ par $f$.
4. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{-5}{f(x)-3}$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition de $g$.
   b) $g$ est-elle prolongeable par continuité en $0$ ?
   c) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to3^-} g(x)$
5. On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{f(x)-1}}$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition de $h$.
   b) Déterminer :
      - ❏ $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$
      - ❏ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} h(x)$
      - ❏ $\lim\limits_{x\to1^+} h(x)$
      - ❏ $\lim\limits_{x\to3^-} h(x)$

## Exercice 4 ★★★

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+x-6}-x+2 & \text{si } x \in\, ]-\infty\,;-3] \cup [2\,;+\infty[ \\ f(x) = \dfrac{\left|x^2-x-2\right|+x-2}{x^3+x^2-4x-4} & \text{si } x \in\, ]-3\,;2[\setminus\{-2,-1\} \end{cases}$.

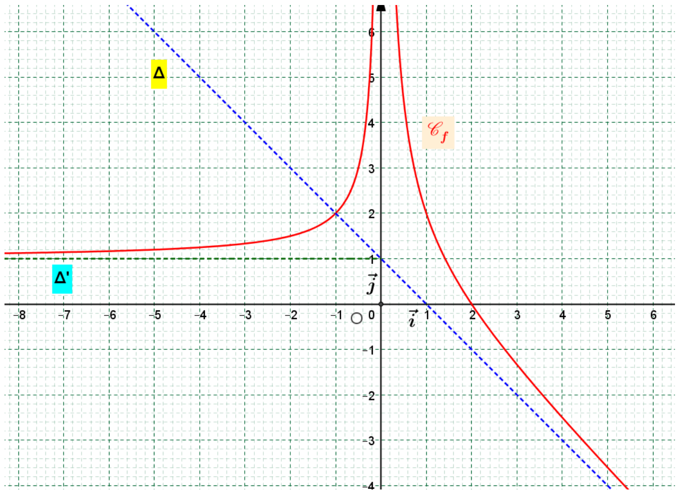
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Etudier la continuité de $f$ en $2$.
2. a) Etudier la limite de $f$ en $(-1)$.
   b) Interpréter le résultat graphiquement.
3. $f$ est-elle prolongeable par continuité en $(-2)$ ?
4. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+2x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

## Exercice 5 ★★★

Le graphique ci-contre représente la courbe $\mathscr{C}_f$ , dans un repère orthonomé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$. $\Delta : y = -x + 1$, $\Delta' : y = 1$ et l'axe des abscisses sont des asymptotes à $\mathscr{C}_f$ .

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{f(x) + x - 1}$




1. Déterminer l'esnsemble de définition de $g$.
2. Montrer que $g$ est prolongeable par continuité en $0$.
3. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
   b) Donner le signe de $f(x) + x - 1$.
   c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   d) Etudier la limite de $g$ en $(-1)$.

«

**Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie...**

»

**[ISOCRATE (436 avant JC 338 avant JC)]**