Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1

On considère un carré direct $ABCD$ de centre O , on désigne par I, J, K et L et les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de chacune des composées suivantes :

$f_1 = S_{(AC)}\ o\ S_{(BD)}$ $\quad f_2 = S_{(AC)}\ o\ S_{(AB)}$ $\quad f_3 = S_{(AC)}\ o\ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$

$f_4 = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}\ o\ S_{(AC)}$ $\quad f_5 = R_{(D,\pi)}\ o\ R_{(A,\pi)}$ $\quad f_6 = R_{\left(D,\frac{\pi}{2}\right)}\ o\ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$

$f_7 = R_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}\ o\ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ $\quad f_8 = S_{(AB)}\ o\ S_{(OL)}$ $\quad f_9 = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}\ o\ t_{\overrightarrow{DA}}$

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

1) a) Caractériser l'isométrie $g = S_{(CB)}\ o\ S_{(AD)}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie $f = S_{(CB)}\ o\ S_{(AD)}\ o\ S_{(AB)}$.

2) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) On pose $R(A) = E$, quelle est la nature du triangle CAE, construire le point E.

b) Montrer que les point D, B et E sont alignés.

3) Soit I le milieu du segment $[EA]$.

a) Vérifier que $R = S_{(CI)}\ o\ S_{(OA)}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie h telle que :

$S_{(CI)}\ o\ h = R\ o\ S_{(CI)}$

Exercice 3

Soit $ABCD$ un carré direct et I , J , K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$

1) On pose $f = S_{(IK)}oR_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$

a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$

b) En déduire que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

2) On pose $g = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}oS_{(IK)}$

a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$

b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

3) a) Caractériser $S_{(IK)}oR_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)}$ et gof

b) Déterminer $fog(B)$

c) Soit E le point d'intersection des droites (BC) et (IL). Déterminer $fog(E)$

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de fog.

Exercice 4

Dans le plan orienté, on considère un triangle non isocèle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par I , J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$

Soit f une isométrie du plan qui transforme J en K et A en B

1) Montrer que $f(C) = A$

2) a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isomètre g qui laisse le point I invariant et qui transforme C en A et A en B

b) Donner $g(J)$

3) Soit l'application $h = t_{\overrightarrow{IB}}\ o\ S_{(KJ)}$

a) Montrer que $h(A) = B$ et $h(C) = A$

b) Déterminer le point $I' = h(I)$

4) a) Quelles sont les images possibles du triangle AIC par f ?

b) Déterminer toutes les isométries f vérifiant $f(A) = B$ et $f(J) = K$

Exercice 5

Soit $ABCD$ un losange de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Soit F l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariants l'ensemble $\{A , B , C , D\}$

Soit $f \in F$. On pose $f(I) = I'$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{I'A} + \overrightarrow{I'B} + \overrightarrow{I'C} + \overrightarrow{I'D} = \vec{O}$.

b) En déduire que le point I est invariant par toute isométries $f \in F$.

2) Soit f un élément de F. Montrer que $f(A) \neq B$ et $f(A) \neq D$.

3) a) On pose $f(A) = C$ et $g = S_{(BD)} \circ f$. Montrer que g fixe les points A et I.

b) En déduire les éléments de F qui transforment A en C.

4) a) Déterminer les éléments de F qui fixent le point A.

b) En déduire que $F = \{Idp , S_{(AC)} , S_{(BD)} , S_I\}$ (Idp étant l'identité du plan).

Exercice 6

Soit $ABCD$ un carré de centre I et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par E le symétrique de I par rapport à la droite (CD).

1) On pose $f = S_{(CB)}\ o\ S_{(CA)}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Déterminer $f(E)$

2) La droite (ED) coupe (AB) en . La perpendiculaire à (JC) coupe (BD) en K.

a) Préciser $f(J)$ puis en déduire la nature du triangle CJK.

b) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KD}}\right) [2\pi]$

3) On pose $g = f \circ S_{(DE)}$ et $h = t_{\overrightarrow{BC}} \circ g$

a) Déterminer $S_{(CA)} \circ S_{(DE)}$ et $S_{(CB)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$.

b) En déduire que $g = S_{(EI)} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$

c) Caractériser alors h

d) Pour tout point M du plan, on note $M_1 = S_{(ED)}(M)$ et $M_2 = f(M)$. On pose $N = M_1 * M_2$

Montrer que N varie sur une droite fixe (à préciser) lorsque M varie dans P.

Exercice 7

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère l'application

$$f : P \to P : M(x, y) \mapsto M'(x', y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est une isométrie du plan.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) En déduire qu'il existe une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ uniques tel que :

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) et $f = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$

2) On se propose de déterminer le vecteur $\vec{u}$ et la droite (D) par deux méthodes.

A\ Méthode 1

a) Déterminer les expressions analytiques de $f \circ f$.

b) Caractériser l'application $f \circ f$ et en déduire le vecteur $\vec{u}$.

c) Caractériser l'application $t_{-\vec{u}} \circ f$ et en déduire la droite (D).

B\ Méthode 2

a) sachant que pour tout point M de P, on a : $M * f(M) \in (D)$

donner une équation cartésienne de (D)

b) En déduire le vecteur $\vec{u}$.

Exercice 8

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On pose $R_1 = R_{(A, \frac{\pi}{6})}$ et $R_2 = R_{(B, \frac{\pi}{3})}$ et $f = R_2 \circ R_1$

1) a) Quelle est la nature de f ?

b) Déterminer $f(A)$ et construire le centre Ω de f.

c) Caractériser l'application $f \circ f$.

2) a) On pose $f(B) = E$. Montrer que la droite (EC) est la médiatrice de $[AB]$.

b) On pose $R_1(B) = F$. Montrer que la droite (ΩF) est la médiatrice de $[EB]$.

3) La perpendiculaire à (BC) passant par E coupe la droite (ΩA) en A'.

a) Montrer que $f(C) = A'$.

b) En déduire que $\Omega = A * A'$.

Exercice 9

Soit $AEFD$ un rectangle tel que $AE = 2AD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par B et C les milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[DF]$ et par I et J les centres respectifs de $ABCD$ et $BEFC$. Les droites (AD) et (BF) se coupent en un point K.

1) Soit f l'isométrie du plan telle que : $f(A) = E$; $f(B) = B$ et $f(D) = F$.

a) Déterminer les images des droites (AB) ; (BC) et (DC) par f.

b) En déduire que $f(C) = C$.

c) Caractériser alors l'isométrie f.

2) Soit g l'isométrie du plan telle que : $g(E) = C$; $g(F) = D$ et $g(C) = A$ et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer les images des points E, F et C par l'application $R\ o\ g$.

b) En déduire que g est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

c) Caractériser l'application : $t = S_{(EF)}\ o\ S_{(BC)}$.

d) Déterminer les droites Δ et Δ' telles que $R = S_{\Delta}\ o\ S_{(BC)}$ et $t = S_{(BC)}\ o\ S_{\Delta'}$

e) Caractériser alors l'application $R\ o\ t$.

3) Soit h l'isométrie du plan telle que : $h(A) = C$; $h(B) = F$ et $h(D) = B$

a) Montrer que h ne fixe aucun point du plan.

b) En déduire que h est une symétrie glissante.

c) Montrer que la droite (IJ) est l'axe de h et $\overrightarrow{IJ}$ est le vecteur de h.

d) Caractériser alors chacune des applications suivantes : $h\ o\ S_{(IJ)}$ et $t_{\overrightarrow{JI}}\ o\ h$.

Exercice 10

Soit f l'application qui à tout $M(x+iy)$ associe le point $M'(x'+iy')$ et tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y+2) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases}$

1) a) Montrer que : $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\overline{z} + 1$

b) On pose $f(O) = O'$, vérifier que $O'M' = OM$.

c) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2) Soit M'' d'affixe z'' et $(f\ o\ f)(M) = M''$

a) Exprimer z'' en fonction de z et montrer que l'application $f\ o\ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.s

b) Soit les points A et B d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2\sqrt{3}}i$ et l'application $g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}\ o\ f$

Déterminer les affixes respectives des point A' et B' images respectifs de A et B par g.

c) Montrer que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe Δ.

3) a) Montrer que $\frac{z_B - z_A}{z_{\frac{1}{2}\vec{u}}}$ est un réel.

b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 11

Soit l'équation (E) : $z^2 - 2(m+2i)z + 2m^2 + 4im - 4 = 0$ où m est un paramètre complexe.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b) Déterminer m pour que $2i$ soit solution de (E), préciser alors l'autre solution.

2) Dans le plan complexe rapporté à repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M, M_1, et M_2 d'affixes respectives : m, $z_1 = (1+i)m + 2i$ et $z_2 = (1-i)m + 2i$.

a) Montrer que : $z_2 = -iz_1 - 2 - 2i$.

b) En déduire que M_2 est l'image de M_1 par une rotation dont on déterminera le centre et l'angle α.

c) On suppose que m est non nul, et on note J le milieu de $[M_1M_2]$. Montrer que J est l'image de M par une translation que l'on précisera. Montrer que $(IJ) \perp (M_1M_2)$.

Exercice 12

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$ où m est un paramètre complexe

1) a) Vérifier que m est une solution de l'équation (E)

b) Resoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m

a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

b) Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$; écrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle

3) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$

On note P le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A

Q le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B

et R le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O

Montrer que les points O , A et B ne sont pas alignés

4) a) Montrer que l'affixe de P est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

b) Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

5) Montrer que $PQ = PR$ et que les droites (PQ) et (PR) sont perpendiculaires.