

Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1

On considère un carré direct $ABCD$ de centre O , on désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de chacune des composées suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 &= S_{(AC)} \circ S_{(BD)} & f_2 &= S_{(AC)} \circ S_{(AB)} & f_3 &= S_{(AC)} \circ R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} \\ f_4 &= R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AC)} & f_5 &= R_{(D, \pi)} \circ R_{(A, \pi)} & f_6 &= R_{\left(D, \frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} \\ f_7 &= R_{\left(C, \frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} & f_8 &= S_{(AB)} \circ S_{(OL)} & f_9 &= R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{DA}} \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

- 1) a) Caractériser l'isométrie $g = S_{(CB)} \circ S_{(AD)}$.
 b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie $f = S_{(CB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AB)}$.
- 2) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$
 a) On pose $R(A) = E$, quelle est la nature du triangle CAE , construire le point E .
 b) Montrer que les point D, B et E sont alignés.
- 3) Soit I le milieu du segment $[EA]$.
 a) Vérifier que $R = S_{(CI)} \circ S_{(OA)}$.
 b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie h telle que :

$$S_{(CI)} \circ h = R \circ S_{(CI)}$$

Exercice 3

Soit $ABCD$ un carré direct et I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$

- 1) On pose $f = S_{(IK)} \circ R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$
 a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$
 b) En déduire que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.
- 2) On pose $g = R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(IK)}$
 a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$
 b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.
- 3) a) Caractériser $S_{(IK)} \circ R_{\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)}$ et $g \circ f$
 b) Déterminer $f \circ g(B)$
 c) Soit E le point d'intersection des droites (BC) et (IL) . Déterminer $f \circ g(E)$

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ g$.

Exercice 4

Dans le plan orienté, on considère un triangle non isocèle ABC tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On désigne par J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$

Soit f une isométrie du plan qui transforme J en K et A en B

- 1) Montrer que $f(C) = A$
- 2) a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie g qui laisse le point I invariant et qui transforme C en A et A en B
b) Donner $g(J)$
- 3) Soit l'application $h = t_{\overline{IB}} \circ S_{(KJ)}$
a) Montrer que $h(A) = B$ et $h(C) = A$
b) Déterminer le point $I' = h(I)$
- 4) a) Quelles sont les images possibles du triangle AIC par f ?
b) Déterminer toutes les isométries f vérifiant $f(A) = B$ et $f(J) = K$

Exercice 5

Soit $ABCD$ un losange de centre I tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

Soit F l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariants l'ensemble $\{A, B, C, D\}$

Soit $f \in F$. On pose $f(I) = I'$.

- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{I'A} + \overrightarrow{I'B} + \overrightarrow{I'C} + \overrightarrow{I'D} = \vec{0}$.
b) En déduire que le point I est invariant par toute isométries $f \in F$.
- 2) Soit f un élément de F . Montrer que $f(A) \neq B$ et $f(A) \neq D$.
- 3) a) On pose $f(A) = C$ et $g = S_{(BD)} \circ f$. Montrer que g fixe les points A et I .
b) En déduire les éléments de F qui transforment A en C .
- 4) a) Déterminer les éléments de F qui fixent le point A .
b) En déduire que $F = \{Idp, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_I\}$ (Idp étant l'identité du plan).

Exercice 6

Soit $ABCD$ un carré de centre I et tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On désigne par E le symétrique de I par rapport à la droite (CD) .

- 1) On pose $f = S_{(CB)} \circ S_{(CA)}$
a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
b) Déterminer $f(E)$
- 2) La droite (ED) coupe (AB) en J . La perpendiculaire à (JC) coupe (BD) en K .
a) Préciser $f(J)$ puis en déduire la nature du triangle CJK .
b) Montrer que $(\widehat{JC}, \widehat{JD}) \equiv (\widehat{KC}, \widehat{KD}) [2\pi]$

3) On pose $g = f \circ S_{(DE)}$ et $h = t_{\overrightarrow{BC}} \circ g$

a) Déterminer $S_{(CA)} \circ S_{(DE)}$ et $S_{(CB)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$.

b) En déduire que $g = S_{(EI)} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$

c) Caractériser alors h

d) Pour tout point M du plan, on note $M_1 = S_{(ED)}(M)$ et $M_2 = f(M)$. On pose $N = M_1 * M_2$

Montrer que N varie sur une droite fixe (à préciser) lorsque M varie dans P .

Exercice 7

Ci-contre, ABC est un triangle rectangle en C tel que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

ACD et ABE sont deux triangles isocèles et rectangles en A .

On désigne par J et K les milieux respectifs de $[CD]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Soit f une isométrie du plan tel que : $f(A) = D$ et $f(C) = A$.

1) On suppose que f fixe un point.

a) Montrer que f est une rotation.

b) Donner les éléments caractéristiques de f .

c) Construire le point $F = f(B)$.

d) Montrer que les points C et F sont alignés.

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g = f \circ R$.

a) Déterminer $g(E)$ puis caractériser g .

b) En déduire que $AEFD$ est un parallélogramme.

3) On suppose que f est sans points fixes.

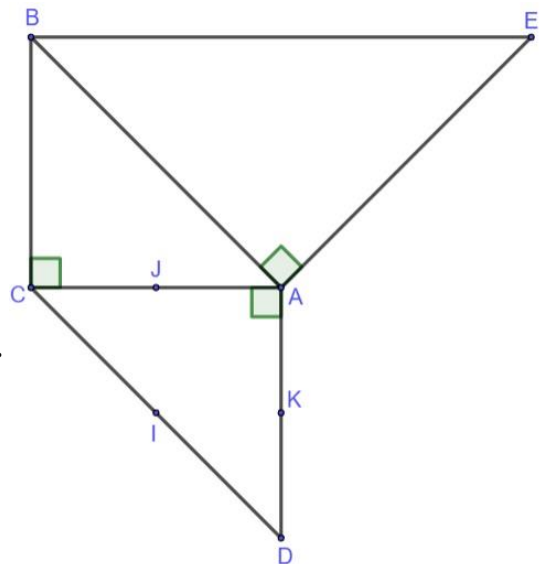
a) Montrer que f est une symétrie glissante.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f .

4) Soit φ la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et ψ la Symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{JK}$ et d'axe (JK) et $h = \varphi \circ \psi^{-1}$.

a) Quelle est la nature de h ?

b) Déterminer $h(D)$ et $h(A)$ caractériser alors h .



Exercice 8

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère l'application

$$f : P \rightarrow P : M(x, y) \mapsto M'(x', y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est une isométrie du plan.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

c) En déduire qu'il existe une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ uniques tel que :

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) et $f = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$

2) On se propose de déterminer le vecteur $\vec{u}$ et la droite (D) par deux méthodes.

A\ Méthode 1

a) Déterminer les expressions analytiques de $f \circ f$.

b) Caractériser l'application $f \circ f$ et en déduire le vecteur $\vec{u}$.

c) Caractériser l'application $t_{-\vec{u}} \circ f$ et en déduire la droite (D) .

B\ Méthode 2

a) sachant que pour tout point M de P , on a : $M * f(M) \in (D)$

donner une équation cartésienne de (D)

b) En déduire le vecteur $\vec{u}$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On pose $R_1 = R_{(A, \frac{\pi}{6})}$ et $R_2 = R_{(B, \frac{\pi}{3})}$ et $f = R_2 \circ R_1$

1) a) Quelle est la nature de f ?

b) Déterminer $f(A)$ et construire le centre Ω de f .

c) Caractériser l'application $f \circ f$.

2) a) On pose $f(B) = E$. Montrer que la droite (EC) est la médiatrice de $[AB]$.

b) On pose $R_1(B) = F$. Montrer que la droite (ΩF) est la médiatrice de $[EB]$.

3) La perpendiculaire à (BC) passant par E coupe la droite (ΩA) en A' .

a) Montrer que $f(C) = A'$.

b) En déduire que $\Omega = A * A'$.

Exercice 10

Soit $AEFD$ un rectangle tel que $AE = 2AD$ et $(\widehat{AE, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On désigne par B et C les milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[DF]$ et par I et J les centres respectifs de $ABCD$ et $BEFC$. Les droites (AD) et (BF) se coupent en un point K .

1) Soit f l'isométrie du plan telle que : $f(A) = E$; $f(B) = B$ et $f(D) = F$.

a) Déterminer les images des droites (AB) ; (BC) et (DC) par f .

b) En déduire que $f(C) = C$.

c) Caractériser alors l'isométrie f .

2) Soit g l'isométrie du plan telle que : $g(E) = C$; $g(F) = D$ et $g(C) = A$ et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer les images des points E , F et C par l'application $R \circ g$.

b) En déduire que g est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

c) Caractériser l'application : $t = S_{(EF)} \circ S_{(BC)}$.

- d) Déterminer les droites Δ et Δ' telles que $R = S_{\Delta} \circ S_{(BC)}$ et $t = S_{(BC)} \circ S_{\Delta'}$
- e) Caractériser alors l'application $R \circ t$.
- 3) Soit h l'isométrie du plan telle que : $h(A) = C$; $h(B) = F$ et $h(D) = B$
- a) Montrer que h ne fixe aucun point du plan.
- b) En déduire que h est une symétrie glissante.
- c) Montrer que la droite (IJ) est l'axe de h et $\vec{IJ}$ est le vecteur de h .
- d) Caractériser alors chacune des applications suivantes : $h \circ S_{(IJ)}$ et $t_{\vec{JI}} \circ h$.

Exercice 11

Soit f l'application qui à tout $M(x + iy)$ associe le point $M'(x' + iy')$ et tel que
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que : $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \bar{z} + 1$
- b) On pose $f(O) = O'$, vérifier que $O'M' = OM$.
- c) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
- 2) Soit M'' d'affixe z'' et $(f \circ f)(M) = M''$
- a) Exprimer z'' en fonction de z et montrer que l'application $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.
- b) Soit les points A et B d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2\sqrt{3}}i$ et l'application $g = t_{\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f$

Déterminer les affixes respectives des point A' et B' images respectifs de A et B par g .

- c) Montrer que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe Δ .
- 3) a) Montrer que $\frac{z_B - z_A}{\frac{z_1}{2}\vec{u}}$ est un réel.
- b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 12

Soit l'équation $(E) : z^2 - 2(m + 2i)z + 2m^2 + 4im - 4 = 0$ où m est un paramètre complexe.

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- b) Déterminer m pour que $2i$ soit solution de (E) , préciser alors l'autre solution.
- 2) Dans le plan complexe rapporté à repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M, M_1 , et M_2 d'affixes respectives : $m, z_1 = (1 + i)m + 2i$ et $z_2 = (1 - i)m + 2i$.
- a) Montrer que : $z_2 = -iz_1 - 2 - 2i$.
- b) En déduire que M_2 est l'image de M_1 par une rotation dont on déterminera le centre et l'angle α .
- c) On suppose que m est non nul, et on note J le milieu de $[M_1M_2]$. Montrer que J est l'image de M par une translation que l'on précisera. Montrer que $(IJ) \perp (M_1M_2)$.

Exercice 13

Soit m un nombre complexe non nul.

- A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z ; $(E) : z^3 - 2m z^2 + 2m^2 z - m^3 = 0$.

1) a) Vérifier que m est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

c) Déterminer deux nombres complexes a et b tel que :

$$z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = (z - m)(z^2 + az + b)$$

d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m .

a) Montrer que z_1 et z_2 sont non nulles.

b) Montrer que $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

c) Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$; écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2 .

B) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On note P le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A ; Q le centre de la rotation d'angle

$\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B et R le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O .

1) Montrer que les points O , A et B ne sont pas alignés.

2) a) Montrer que l'affixe de P est $p = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

b) Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) Montrer que $OQ = PR$ et que les droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 14

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$ où $m \in \mathbb{C}$

a) Montrer que le discriminant de (E) est $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

c) Ecrire sous forme algébrique les valeurs de m pour que le produit des deux solutions de (E) soit égal à 1.

2) On pose : $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique dans le cas où $m = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points :

M , M_1 et M_2 d'affixes respectives , $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$.

Déterminer l'ensemble des points M pour que , M_1 et M_2 soient alignés.

4) a) Soit R la transformation qui fait correspondre à tout $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que

$$z' = 1 - i$$