Isométries du plan 4ème Mathématiques

Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1

On considère un carré direct $ABCD$ de centre O , on désigne par I, J, K et L et les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de chacune des composées suivantes :

$f_1 = S_{(AC)}\ o\ S_{(BD)}$ $\qquad f_2 = S_{(AC)}\ o\ S_{(AB)}$ $\qquad f_3 = S_{(AC)}\ o\ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$

$f_4 = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}\ o\ S_{(AC)}$ $\qquad f_5 = R_{(D,\pi)}\ o\ R_{(A,\pi)}$ $\qquad f_6 = R_{\left(D,\frac{\pi}{2}\right)}\ o\ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$

$f_7 = R_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}\ o\ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ $\qquad f_8 = S_{(AB)}\ o\ S_{(OL)}$ $\qquad f_9 = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}\ o\ t_{\overrightarrow{DA}}$

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle en A. On désigne par D l'image de B par la symétrie Orthogonale d'axe (AC) et par I le milieu du segment $[\boldsymbol{BC}]$ Soit f une isométrie laissant A invariant et transformant B et C respectivement en C et D.

On pose $g = S_{(AC)}\ o\ f$.

1) Déterminer $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ et $g(I)$.

2) Montrer que g est une symétrie orthogonale.

Exercice 3

Soit $AEFD$ un rectangle tel que $AE = 2AD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par B et C les milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[DF]$ et par I et J les centres respectifs de $ABCD$ et $BEFC$

1) Soit f l'isométrie du plan telle que : $f(A) = E$; $f(B) = B$ et $f(D) = F$.

a) Déterminer les images des droites (AB) ; (BC) et (DC) par f.

b) En déduire que $f(C) = C$.

c) Caractériser alors l'isométrie f.

2) Soit g l'isométrie du plan telle que : $g(E) = C$; $g(F) = D$ et $g(C) = A$ et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer les images des points E, F et C par l'application $R\ o\ g$.

b) En déduire que g est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

c) Caractériser l'application : $t = S_{(EF)}\ o\ S_{(BC)}$.

d) Déterminer les droites Δ et Δ' telles que $R = S_{\Delta}\ o\ S_{(BC)}$ et $t = S_{(BC)}\ o\ S_{\Delta'}$

e) Caractériser alors l'application $R\ o\ t$.

3) Soit h l'isométrie du plan telle que : $h(A) = C$; $h(B) = F$ et $h(D) = B$

a) Montrer que h ne fixe aucun point du plan.

b) En déduire que h est une symétrie glissante.

c) Montrer que la droite (IJ) est l'axe de h et $\overrightarrow{IJ}$ est le vecteur de h.

d) Caractériser alors chacune des applications suivantes : $h \ o\ S_{(IJ)}$ et $t_{\overrightarrow{JI}}\ o\ h$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

1) **a)** Caractériser l'isométrie $g = S_{(CB)}\ o\ S_{(AD)}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie $f = S_{(CB)}\ o\ S_{(AD)} o\ S_{(AB)}$.

2) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) On pose $R(A) = E$, quelle est la nature du triangle CAE, construire le point E.

b) Montrer que les point D, B et E sont alignés.

3) Soit I le milieu du segment $[EA]$.

a) Vérifier que $R = S_{(CI)}\ o\ S_{(OA)}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie h telle que : $S_{(CI)}\ o\ h = R\ o\ S_{(CI)}$

Exercice 5

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ on considère l'application

$f : P \to P : M(x\,,y) \mapsto M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$

1) **a)** Montrer que f est une isométrie du plan.

b) Déterminer l'ensemble I des points invariants par f.

c) En déduire la nature de f.

2) On pose $\vec{u} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{2}{5}\vec{\jmath}$

a) Déterminer les expressions analytiques de l'application : $S = t_{\vec{u}}$ o f

b) En déduire que S est une symétrie orthogonale et donner une équation cartésienne de son axe.

c) Caractériser alors l' isométrie f.

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$ où m est un paramètre complexe

1) **a)** Vérifier que m est une solution de l'équation (E)

b) Resoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m

a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

b) Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$; écrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$

On note P le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A

Q le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B

et R le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O

Montrer que les points O , A et B ne sont pas alignés

4) **a)** Montrer que l'affixe de P est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

b) Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

5) Montrer que $PQ = PR$ et que les droites (PQ) et (PR) sont perpendiculaires

Exercice 7

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O, on désigne par E, F, G et H les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et par I et J les points tels que $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{DA}$ et $J = S_{(EG)}(I)$

Soit f une isométrie du plan telle que : $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

1) **a)** Faire une figure.

b) Déterminer $f(E)$.

c) Déterminer l'image de la droite (BC) par f.

2) On désigne par S_O la symétrie centrale de centre O et par $S_{(AB)}$ la symétrie axiale d'axe (AB)

a) Déterminer les images des points A et B par l'isométrie $S_O \, o \, f$.

b) En déduire que : $f = S_O$ ou $f = S_O \, o \, S_{(AB)}$

c) Dans le cas où $f \neq S_O$, montrer que $f = S_{(EG)} \, o \, t_{\overrightarrow{DA}}$ (on pourra décomposer S_O en composée de deux symétries axiales).

3) Soit l'isométrie $g = S_{(EG)} \, o \, t_{\overrightarrow{AD}} \, o \, S_{(EG)} \, o \, t_{\overrightarrow{DA}}$

a) Déterminer $g(G)$; $g(D)$ et $g(H)$

b) En déduire que $g = Idp$

c) En déduire que si $f \neq S_O$ alors $f = t_{\overrightarrow{AD}} \, o \, S_{(EG)}$

Exercice 8

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A et tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \, [2\pi]$.

On pose $I = B * C$, $J = C * A$ et $K = A * B$ et $C' = S_{(KJ)}(C)$

Soit f une isométrie du plan telle que $f(A) = B$ et $f(J) = K$.

1) Montrer que $f(C) = A$.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie g du plan définie par $g(A) = B$, $g(C) = A$ et $g(I) = I$.

3) Soit $I' = S_K(I)$.

a) Montrer qu'il existe une unique isométrie h telle que $h(A) = B$, $h(C) = A$ et $h(I) = I'$

b) Montrer que $h = t_{\overrightarrow{IB}} \, o \, S_{(KJ)}$

4) **a)** Quelles sont les images possibles du triangle AIC par l'isométrie f.

b) Déterminer alors l'isométrie f.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par S la symétrie centrale de centre O.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications suivantes :

$S_{(AC)} \circ S_{(BD)} \circ S$ et $S_{(AB)} \circ S_{(DC)} \circ t_{2\overrightarrow{AC}}$

2) **a)** Prouver que $S \circ r$ est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b) En déduire que B est l'unique point du plan tel que $r(B) = S(B)$.

3) Soient M et N deux points du plan tels que : $M \neq B$ et $B = M * N$.

On pose $r(M) = E$; $S(M) = F$; $r(N) = G$ et $S(N) = H$.

a) Placer les points M, N, E, F, G et H.

b) Montrer que $EFGH$ est un carré de centre D.

c) Soit r' la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $r' \circ r$ et en déduire $r'(E) = F$.

Exercice 10

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère l'application $f : P \to P$ qui à tout point M d'affixe z on associe le point M d'affixe z' tel que $z' = iz + 3 + i$

1) Montrer que f est une isométrie du plan.

2) Montrer que f admet un seul point invariant I et en déduire sa nature.

3) **a)** Déterminer l'affixe du point $O' = f(O)$.

b) Donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}}\right)$.

4) Donner les éléments caractéristiques de f.

Exercice 11

Soit $ABCD$ un losange de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Soit F l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariants l'ensemble $\{A, B, C, D\}$

Soit $f \in F$. On pose $f(I) = I'$.

1) **a)** Montrer que $\overrightarrow{I'A} + \overrightarrow{I'B} + \overrightarrow{I'C} + \overrightarrow{I'D} = \vec{O}$.

b) En déduire que le point I est invariant par toute isométries $f \in F$.

2) Soit f un élément de F. Montrer que f(A) ≠ B et f(A) ≠ D

3) **a)** On pose $f(A) = C$ et $g = S_{(BD)} \circ f$. Montrer que g fixe les points A et I.

b) En déduire les éléments de F qui transforment A en C.

4) **a)** Déterminer les éléments de F qui fixent le point A.

b) En déduire que $F = \{Idp, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_I\}$ (Idp étant l'identité du plan).

Exercice 12

Soit ABC un triangle équilatéral direct et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC. La médiatrice de $[BC]$ recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en D et la droite (BD) coupe (AC) en E.

1) **a)** Montrer que le triangle BCE est isocèle en C.

b) Montrer que (DC) est la médiatrice de $[AE]$.

2) On note $f = S_{(BD)} \text{ o } S_{(DC)}$ et $g = S_{(AC)} \text{ o } S_{(AB)}$.

a) Caractériser les isométries f et g.

b) Déterminer les droites Δ et Δ' telles que $f = S_\Delta \text{ o } S_{(AD)}$ et $g = S_{(AD)} \text{ o } S_\Delta{}'$

c) Montrer que Δ et Δ' sont parallèles puis identifier $f \text{ o } g$.

Exercice 13

On considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ *et* $[AB]$

On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On pose $f = R \, o \, T$ et $g = T \, o \, R$.

1) a) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g

2) a) Déterminer la nature de $g \, o \, f^{-1}$.

b) Déterminer l'image de A par $g \, o \, f^{-1}$.et caractériser alors $g \, o \, f^{-1}$.

c) Soit M un point du plan, n'appartenant pas à la droite (IJ) , M_1 est l' image de M par f et M_2 est l'image de M par g.

Montrer que le quadrilatère ACM_2M_1 est un parallélogramme.

Exercice 14

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On pose $R_1 = R_{\left(A, \frac{\pi}{6}\right)}$ et $R_2 = R_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)}$ et $f = R_2 \text{ o } R_1$

1) **a)** Quelle est la nature de f ?

b) Déterminer $f(A)$ et construire le centre Ω de f.

c) Caractériser l'application $f \text{ o } f$.

2) **a)** On pose $f(B) = E$. Montrer que la droite (EC) est la médiatrice de $[AB]$.

b) On pose $R_1(B) = F$. Montrer que la droite (ΩF) est la médiatrice de $[EB]$.

3) La perpendiculaire à (BC) passant par E coupe la droite (ΩA) en A'.

a) Montrer que $f(C) = A'$.

b) En déduire que $\Omega = A * A'$.

Exercice 15

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1) **a)** Montrer qu'il existe une unique isométrie f qui transforme A en , B en C et C en B.

b) Déterminer l'image de la droite (DC) par l'isométrie f.

c) Caractériser l'isométrie f.

2) Soit g une isométrie du plan telle que : $g(A) = B$ et $g(B) = C$.

a) Montrer que si g admet un point invariant alors ce point est nécessairement O.

b) Caractériser l'isométrie g dans le cas où $g(O) = O$.

c) Montrer que si le point O n'est pas invariant par g alors son image O' par g est son symétrique par rapport à la droite (BC).

Exercice 16

Soit $AFED$ un carré de coté 4 cm tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport à (EF).

1) **a)** Soit R la rotation définie par $R(F) = E$ et $R(E) = D$. Préciser l'angle et le centre de R.

b) Soit $f = R \circ S_{(OI)}$ où $S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $f = S_{(OI)}$.

2) Soit $R' = t_{\overrightarrow{OI}} \circ R^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OI}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$ et R^{-1} désigne la réciproque de R.

a) Déterminer les images des points O , F et A par R'.

b) Déduire que R' est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3) Soit Δ la médiatrice du segment $[AF]$ et soit $g = S_{(AD)} \circ S_{\Delta} \circ S_{(OI)}$.

a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Soit M un point du plan. Montrer que $g(M) = R'(M)$ si et seulement si $f(M) = M$.

c) En déduire l'ensemble des points M tel que $g(M) = R'(M)$.

Exercice 17

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On pose $I = A * B$; $J = A * C$ et $K = B * C$

Soit f une isométrie du plan telle que $f(A) = C$ et $f(I) = J$

1) **a)** Montrer que $f(B) = A$.

b) Montrer que s'il existe un point M invariant par f alors nécessairement $M = K$.

2) On suppose que $f(K) = K$. Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

3) On suppose dans cette question que $f(K) = L$ où $L = S_J(K)$ et on considère l'application $g = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}} \circ f$

La parallèle à (AK) et passant par J coupe (BC) en P.

a) Déterminer $g(A)$; $g(K)$ et $g(I)$.

b) Montrer alors que $g = S_{(IJ)}$.

c) En déduire que $f = S_{(JP)} \circ S_{(AK)} \circ S_{(IJ)}$, que peut-on conclure ?

Exercice 18

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère l'application

$f : P \to P : \; M(x\,,y) \mapsto M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est une isométrie du plan.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) En déduire qu'il existe une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ uniques tel que :

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) et $f = S_{(D)} \text{ o } t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \text{ o } S_{(D)}$

2) On se propose de déterminer le vecteur $\vec{u}$ et la droite (D) par deux méthodes.

<u>A\ Méthode 1</u>

a) Déterminer les expressions analytiques de $f \text{ o } f$.

b) Caractériser l'application $f \text{ o } f$ et en déduire le vecteur $\vec{u}$.

c) Caractériser l'application $t_{-\vec{u}} \text{ o } f$ et en déduire la droite (D).

<u>B\ Méthode 2</u>

a) sachant que pour tout point M de P, on a : $M * f(M) \in (D)$

donner une équation cartésienne de (D)

b) En déduire le vecteur $\vec{u}$.

<u>Exercice 19</u>

Soit f l'application qui à tout $M(x + iy)$ associe le point $M'(x' + iy')$ et tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \end{cases}$

1) a) Montrer que : $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\bar{z} + 1$

b) On pose $f(O) = O'$, vérifier que $O'M' = OM$.

c) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2) Soit M'' d'affixe z'' et $(f\ o\ f)(M) = M''$

a) Exprimer z'' en fonction de z et montrer que l'application $f\ o\ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.

b) Soit les points A et B d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2\sqrt{3}}i$ et l'application $g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}\ o\ f$

Déterminer les affixes respectives des point A' et B' images respectifs de A et B par g.

c) Montrer que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe Δ.

3) a) Montrer que $\frac{z_B - z_A}{z_{\frac{1}{2}\vec{u}}}$ est un réel.

b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f.