

Exercice 1

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx ; \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^2 x dx ; \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 + \tan^2 x dx ; \int_1^0 -2x\sqrt{1+x^2} dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \sin t) dt ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin t + \cos t + 3) dt ;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 u} du ; \int_0^1 \frac{2v}{\sqrt{v^2+1}} dv - \int_3^1 \frac{2v}{\sqrt{v^2+1}} dv ; \int_1^0 \frac{x^2}{(1+x^3)^5} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

2) a) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$

b) En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t dt$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \cos x$.

1) a) Calculer $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] ; f'(x)$.

b) Justifier que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$.

2) Soit g la fonction réciproque de f .

a) Justifier que g est dérivable sur $]0, 1[$.

b) Montrer que $\forall x \in]0, 1[: g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) a) Calculer $g(\frac{1}{2})$ et $g(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

b) Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que $I(-1, -2)$ est un point d'inflexion de (C) .

c) Donner une équation de la tangente T à (C) en I .

2) a) Dresser le tableau de variation de f' et en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$ on a : $f'(t) \geq 1$.

b) Montrer en intégrant l'inégalité précédente que $\forall x \in [-1, +\infty[$ et $\forall t \in [-1, x]$ on a $f(x) \geq x - 1$

d) En déduire la position relative de (C) et T.

Exercice 4

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.

1) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \leq 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_t^{t^2} f(x) dx \leq 0$$

2) La fonction F définie par : $F(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{1+t^2} dt$ est dérivable sur $[0, 1]$

3) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -2$

4) Si $\int_1^3 f(x) dx \geq 0$ alors $f(x) \geq 0$ sur $[1, 3]$

Exercice 5

Donner la bonne réponse

1) Soit $I = \int_0^\pi x \sin t dt$

a) $I = \pi \sin t$

b) $I = 2x$

c) $I = \pi \sin x$

2) Soit $J = \int_{-1}^1 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx$

a) $J = 1$

b) $J = -1$

c) $J = 0$

3) La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt$ est dérivable sur :

a) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) $]-1, +\infty[$

c) $]-\infty, -1[$

Exercice 6

Indiquer la bonne réponse

1) Soit $I = \int_0^1 2t \cos^2(\pi t) dt$ et $J = \int_0^1 2t \sin^2(\pi t) dt$ alors $I + J =$

a) -1

b) 1

c) π

2) Soit $K = \int_0^\pi \sin^2 x dx$ alors $K =$

a) 0

b) $\frac{\pi}{2}$

c) π

Exercice 7

1) Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx$

2) Calculer $J = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^3} dx$ (par une intégration par parties)

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit (C) sa courbe.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on note f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.
- d) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$
- e) Tracer (C) et (C') courbe de f^{-1} .
- 2) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives :
 $y = 1$; $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

Montrer que $A = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$

3) Soit F la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{x^2}{1+x^2} dx$

b) Montrer F est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer $F'(x)$

c) Montrer alors que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $F(x) = -x + \tan x$

4) Déduire alors la valeur exacte de A

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan^2 x$ et soit (C) sa courbe .

- 1) Etudier f et tracer (C) .
- 2) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ Calculer A .

3) Soit la fonction g définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = f^2(x) + f(x)$.

a) Montrer que g admet une unique primitive G sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui s'annule en 0.

b) Montrer que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; $G(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x$.

4) Calculer le volume V engendré par la rotation de A autour de l'axe des abscisses.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$

- 1) Etudier les variation de f et construire sa courbe (C) .
- 2) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$
- 3) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de A au tour de l'axe des abscisses.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin^2 x$ et C_f sa courbe.

- 1) a) Dresser le tableau de variation de .

- b) Tracer C_f .
- 2) Linéariser $\sin^2 x$ et $\sin^4 x$ ($\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$).
- 3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \pi$
- 4) Calculer le volume engendré par la rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin t & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité graphique 2 cm).

1) a) Montrer que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}(x^2-2x+\frac{1}{2})}$

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que $I\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ est un centre de symétrie de C_f .

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f en I .

c) Tracer C_f et T dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites :

$$\Delta_1: x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \Delta_2: x = 1$$

Exercice 14

On a représenté ci-dessous la courbe (C) d'une fonction f définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et la courbe (C') de sa fonction dérivée.

Les droites Δ et Δ' d'équations respectives $x = 1$ et $y = x - 4$ sont des asymptotes à (C) . La courbe (C) admet au point d'abscisse 3 une tangente horizontale.

On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.

1) a) Par lecture graphique donner $f'(3)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 4)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

b) Par lecture graphique déterminer $f(3)$.

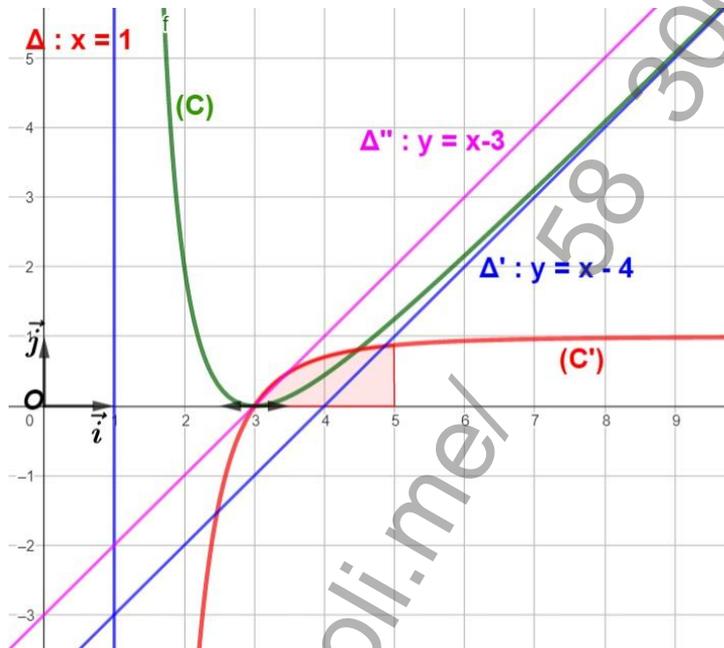
2) a) Par lecture graphique donner la position relative de (C) et $\Delta': y = x - 4$ et la position relative de (C) et $\Delta'': y = x - 3$.

b) En déduire que : $0 < A < 2$.

3) Soit $J = \int_3^5 x f'(x) dx$

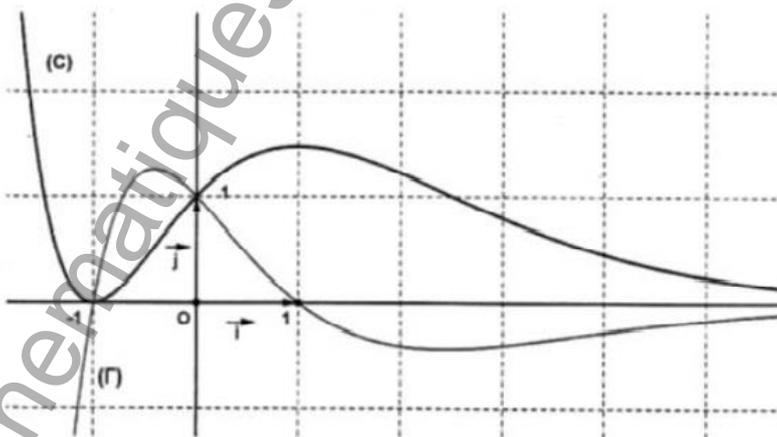
A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $J = 5f(5) - A$

4) Sachant que $f(x) = x - 4 + \frac{4}{(x-1)^2}$; déterminer la valeur de A puis la valeur de J .



Exercice 15

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes (C) et (Γ) , représentative d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} et de sa fonction dérivée f' .



- 1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f' .
- 2) Déterminer $f'(0)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$
- 3) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe de f' l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$
- 4) Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = \int_0^1 x^n f'(x) dx$
 - a) A l'aide d'une intégration par partie montrer que $U_1 = f(1) - \int_0^1 f(x) dx$
 - b) Montrer que (U_n) est décroissante

c) Montrer que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) Dédire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0

c) Etudier la position relative de (C_f) et la tangente T

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α et $1 < \alpha < 2$

b) Construire (C_f) et T

3) a) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$

b) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

4) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 , puis déterminer $(f^{-1})'(1)$

c) Construire dans le même repère $(C_{f^{-1}})$

5) On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \geq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |U_n - \alpha|$ π

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente

Exercice 17

Soit la suite réelle définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

1) a) Justifier l'existence de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$.

c) Montrer que la suite U est décroissante. Que peut-on conclure ?

d) Vérifier que : $U_1 = 1$ et que $U_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{n+1} U_{n+2}$

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1} U_n \leq U_{n+1} \leq U_n$ en déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$