INTEGRALES 4ème Sc EXPERIMENTALES

Exercice 1

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (3x^2-2x+1)dx \ ; \ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^2 x \, dx \ ; \ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2+\tan^2 x \, dx \ ; \ \int_1^0 -2x\sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x} dx \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \sin t)\, dt \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t + \cos t + 3)\, dt \ ;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 u} du \ ; \ \int_0^1 \frac{2v}{\sqrt{v^2+1}} dv - \int_3^1 \frac{2v}{\sqrt{v^2+1}} dv \ ; \ \int_1^0 \frac{x^2}{(1+x^3)^5} dx \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

2) a) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \, dt$

b) En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \, dt$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x$.

1) a) Calculer $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x)$.

b) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.

2) Soit g la fonction réciproque de f.

a) Justifier que g est dérivable sur $[0, 1[$.

b) Montrer que $\forall x \in [0, 1[: g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) a) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que $I(-1, -2)$ est un point d'inflexion de (C).

, c) Donner une équation de la tangente T à (C) en I.

2) a) Dresser le tableau de variation de f' et en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$ on a : $f'(t) \geq 1$.

b) Montrer en intégrant l'inégalité précédente que $\forall x \in [-1, +\infty[$ et $\forall t \in [-1, x]$

on a $f(x) \geq x - 1$

d) En déduire la position relative de (C) et T.

Exercice 4

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \leq 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_t^{t^2} f(x)dx \leq 0$$

2) La fonction F définie par : $F(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{1+t^2}\,dt$ est dérivable sur $[0\,,1]$

3) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2$

4) $Si\ \int_1^3 f(x)\,dx \geq 0\quad alors\ f(x) \geq 0\ sur\ [1\,,3]$

Exercice 5

Donner la bonne réponse

1) Soit $I = \int_0^{\pi} x \sin t\ dt$

a) $I = \pi \sin t$ b) $I = 2x$ c) $I = \pi \sin x$

2) Soit $J = \int_{-1}^{1} \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx$

a) $J = 1$ b) $J = -1$ c) $J = 0$

3) La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\,dt$ est dérivable sur :

a) $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ b) $]-1\,,+\infty[$ c) $]-\infty\,,-1[$

Exercice 6

Indiquer la bonne réponse

1) Soit $I = \int_0^1 2t\cos^2(\pi t)dt$ et $J = \int_0^1 2t\sin^2(\pi t)dt$ alors $I + J =$

a) -1 b) 1 c) π

2) Soit $K = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$ alors $K =$

a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) π

Exercice 7

1) Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3}\,dx$

2) Calculer $J = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$ (par une intégration par parties)

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $[0\,,1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit (C) sa courbe.

1) **a)** Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on note f^{-1} définie sur $[0\ ,+\infty[$.

d) Montrer que $\forall x \in [0\ ,+\infty[\ , f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e) Tracer (C) et (C') courbe de f^{-1}.

2) Soit A l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives :

$y = 1\ ;\ x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

Montrer que $A = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

3) Soit F la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

b) Montrer F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer F'(x)

c) Montrer alors que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ on a $F(x) = -x + \tan x$

4) Déduire alors la valeur exacte de A

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = tan^2 x$ et soit (C) sa courbe .

1) Etudier f et tracer (C).

2) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ Calculer A.

3) Soit la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f^2(x) + f(x)$.

a) Montrer que g admet une unique primitive G sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0.

b) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right[\ ;\ G(x) = \frac{1}{3}tan^3 x$.

4) Calculer le volume V engendré par la rotation de A autour de l'axe des abscisses.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$

1) Etudier les variation de f et construire sa courbe (C).

2) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$

3) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de A au tour de l'axe des abscisses.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ \pi]$ par $f(x) = sin^2 x$ et C_f sa courbe.

1) **a)** Dresser le tableau de variation de .

b) Tracer C_f .

2) Linéariser $sin^2 x$ et $sin^4 x$ ($\cos 2x = 1 - 2sin^2 x$).

3) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \pi$

4) Calculer le volume engendré par la rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(t) = \begin{cases} \cos t & si \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin t & si \ \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité graphique 2 cm).

1) a) Montrer que le domaine de définition de f est $D_f = IR$.

b) Montrer que pour tout x de IR $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que $I\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ est un centre de symétrie de C_f.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f en I.

c) Tracer C_f et T dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites : $\Delta_1 : x = \frac{1}{2}$ et $\Delta_2 : x = 1$

Exercice 14

On a représenté ci-dessous la courbe (C) d'une fonction f définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et la courbe (C') de sa fonction dérivée.

Les droites Δ et Δ' d'équations respectives $x = 1$ et $y = x - 4$ sont des asymptotes à (C). La courbe (C) admet au point d'abscisse 3 une tangente horizontale.

On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.

1) a) Par lecture graphique donner $f'(3)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-4)$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

b) Par lecture graphique déterminer $f(3)$.

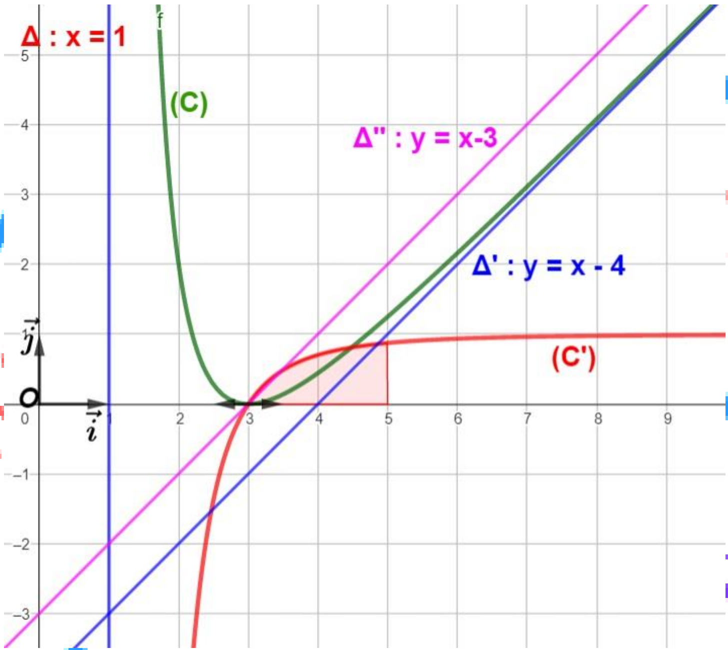
2) a) Par lecture graphique donner la position relative de (C) et $\Delta' : y = x - 4$ et la position relative de (C) et $\Delta'' : y = x - 3$.

b) En déduire que : $0 < A < 2$.

3) Soit $J = \int_3^5 xf'(x)\,dx$

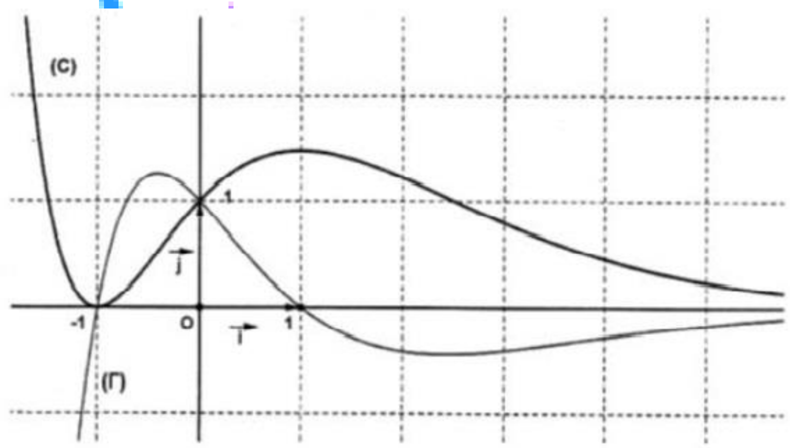
A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $J = 5f(5) - A$

4) Sachant que $f(x) = x - 4 + \frac{4}{(x-1)^2}$; déterminer la valeur de A puis la valeur de J.



Exercice 15

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O\,\vec{i}\,,\vec{j})$ les courbes (C) et (Γ), représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f'.



1) Reconnaitre la courbe représentative de f et celle de f'.

2) Déterminer (0) $f'(0)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f' l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

4) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^1 x^n f'(x)\,dx$

a) A l'aide d'une intégration par partie montrer que $U_1 = f(1) - \int_0^1 f(x)\,dx$

b) Montrer que (U_n) est décroissante

c) Montrer que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) Déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0

c) Etudier la position relative de (C_f) et la tangente T

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et $1 < \alpha < 2$

b) Construire (C_f) et T

3) a) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$

b) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en , puis déterminer $(f^{-1})'(1)$

c) Construire dans le même repère $(C_{f^{-1}})$

5) On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \geq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}|U_n - \alpha|$ π

c) En déduire que la suite (Un) est convergente

Exercice 17

Soit la suite réelle définie sur IN^* par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

1) a) Justifier l'existence de U_n pour tout $n \in IN^*$.

b) Montrer que $\forall n \in IN^*$, $U_n \geq 0$.

c) Montrer que la suite U est décroissante. Que peut-on conclure ?

d) Vérifier que : $U_1 = 1$ et que $U_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{n+1} U_{n+2}$

b) En déduire $\forall n \in IN^*$ on a : $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1} U_n \leq U_{n+1} \leq U_n$ en déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$