

b) Calculer alors $J = \int_0^1 (x^3 - 3x) \sin(\pi x) dx$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

On se propose de calculer \mathcal{A} la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

1) a) Etudier la parité de f .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2 et à gauche en 2 . Interpréter les résultats graphiquement.

c) Montrer que f est dérivable sur $] -2, 2[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -2, 2[$.

d) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f .

2) Soit F la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

Soit G la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $G(x) = F(2 \cos x)$.

a) Déterminer $F(0)$

b) Montrer que G est dérivable sur $[0, \pi]$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

c) Calculer $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et en déduire que $\forall x \in [0, \pi]$ on a : $G(x) = -2x + \sin(2x) + \pi$.

3) a) Calculer $F\left(2 \cos \frac{\pi}{3}\right)$

b) Calculer alors \mathcal{A} .

Exercice 5

Soit la suite réelle U définie sur \mathbb{N}^* par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

1) a) Justifier l'existence de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$.

c) Montrer que la suite U est décroissante. Que peut-on conclure ?

d) Vérifier que : $U_1 = 1$ et que $U_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x dx = \frac{1}{n+1} U_{n+2}$$

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1} U_n \leq U_{n+1} \leq U_n$

En déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

3) a) Montrer par récurrence que : pour tout $n \geq 2$ on a : $nU_n U_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

b) En déduire la limite de la suite U .

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ , par $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f .

b) Justifier que pour tout $t \geq 0$ on a : $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq 1$

2) On pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt, \forall x \geq 0$.

a) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de F .

3) Soit G la fonction définie sur \mathbb{R} par : $G(x) = F(x^2)$.

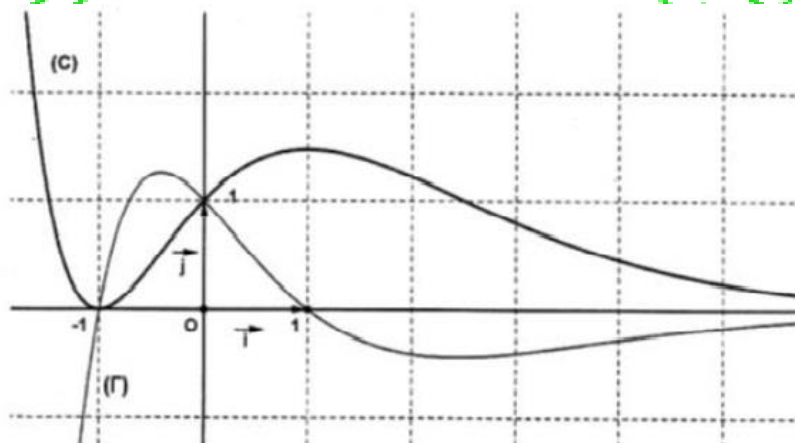
a) Montrer que G est dérivable à droite en 0.

b) Etudier les variations de G sur \mathbb{R} .

c) Donner l'allure de la courbe de C_G de G .

Exercice 7

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes (C) et (Γ) , représentative d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} et de sa fonction dérivée f' .



- 1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f' .
- 2) Déterminer (0) , $f'(0)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$.
- 3) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe de f' l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

4) Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = \int_0^1 x^n f'(x) dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $U_1 = f(1) - \int_0^1 f(x) dx$

b) Montrer que (U_n) est décroissante

c) Montrer que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) Dédire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 8

A) On pose $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de F .

2) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3) On pose $g(x) = F(\tan x)$; $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a) Calculer $g(0)$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; $F(\tan x) = x$.

4) a) Montrer que F est la fonction réciproque de la fonction $f(x) = \tan x$.

b) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.

B) Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $U_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1) Montrer que pour tout réel x : $1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

2) En déduire que $U_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$

3) a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left| U_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et soit C_f sa courbe représentative unité graphique 2 cm

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer C_f .

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \int_0^{\tan^2 x} f(t) dt$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

on a : $g'(x) = 4\tan^2 x$

b) En déduire l'expression de $g(x)$.

c) Déterminer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f l'axe (O, \vec{i}) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{n+k} \right)$

a) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n - \frac{1}{n} \leq A \leq S_n$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ par : $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que la droite $\Delta: x = 1$ est axe de symétrie de C_f .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de C_f . d) Construire C_f .

2) Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = \int_0^{1+\sin x} f(t) dt$

a) Justifier l'existence de $F(x)$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et l'axe des abscisses.

4) Soit g la fonction définie sur $[0, 2]$ par : $g(x) = x\sqrt{x(2-x)}$ et soit C_g sa courbe représentative. On

donne ci-contre le tableau de variation de g .

x	0	$\frac{3}{2}$	2
$g'(x)$	0		
$g(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

a) Etudier la position de C_f et C_g .

b) Construire C_g dans le même repère que C_f .

c) Calculer l'aire du domaine plan limitée par C_f et C_g .

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $]0, 4[$ par : $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, 4[$ et que $\forall x \in]0, 4[$ on a : $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{4x-x^2})^3}$

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 4[$ sur \mathbb{R} .

3) a) Montrer que le point $A(2, 0)$ est un centre de symétrie de C_f .

b) Ecrire une équation de la tangente T à C_f en A .

4) On suppose que le point I d'abscisse α , ($\alpha \approx 3,9$) est l'unique point d'intersection de la courbe C_f et la droite $\Delta: y = x$.

a) Tracer C_f et T .

b) Soit f^{-1} la réciproque de f et soit $C_{f^{-1}}$ sa courbe

Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O \vec{i}, \vec{j})$.

5) Calculer \mathcal{A} la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Exercice 12

A) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R}_+ .

b) Tracer la courbe C_f de f .

c) Montrer graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]1, 2]$.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x .

c) Tracer C' la courbe de f^{-1} .

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \tan x$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$, calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

4) Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine plan limité par la courbe C_f et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 13

Soit h une fonction définie sur $[0, 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ et soit C_h sa courbe

1) Soit $M(x, y)$ un point de C_h avec $y = h(x)$

a) Montrer que $OM = 1$

b) En déduire que C_h est un arc du cercle de centre O et de rayon 1.

c) Soit $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ montrer que $I = \frac{\pi}{4}$

2) Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ et soit C_f sa courbe

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

b) Dresser le tableau de variations de f et tracer C_f (unité graphique 4 cm)

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on note g définie sur $[0, 1]$

b) Tracer C_f et C_g la courbe représentative de g

d) Montrer que $\forall x \in [0, 1], g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par C_f et C_g

et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Calculer A puis déterminer $\int_0^1 f(x) dx$

5) Soit la suite $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1 - t^2} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) A l'aide d'une intégration par partie montrer que $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}$

b) Calculer I_0 et calculer $\int_0^1 t^2 \sqrt{1 - t^2} dt$ et $\int_0^1 (1 - t^2) \sqrt{1 - t^2} dt$

Exercice 14

Soit g la fonction définie sur $[0, 1[$ par $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ et soit C_g sa courbe représentative.

1) a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g(x) dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx$$

2) a) Soit $F(x) = \int_0^x \sqrt{1 - t^2} dt \quad x \in [0, 1]$

Montrer que F est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $F'(x)$.

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1 - t^2} dt$$

b) Soit la fonction G définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $G(x) = F(\sin x)$

Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et calculer $G'(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a : $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

d) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx$ puis $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g(x) dx$

3) On a représenté ci-dessous la courbe C_1 de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x + \sqrt{x^2 + 4}}}$$

* La courbe C_1 admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

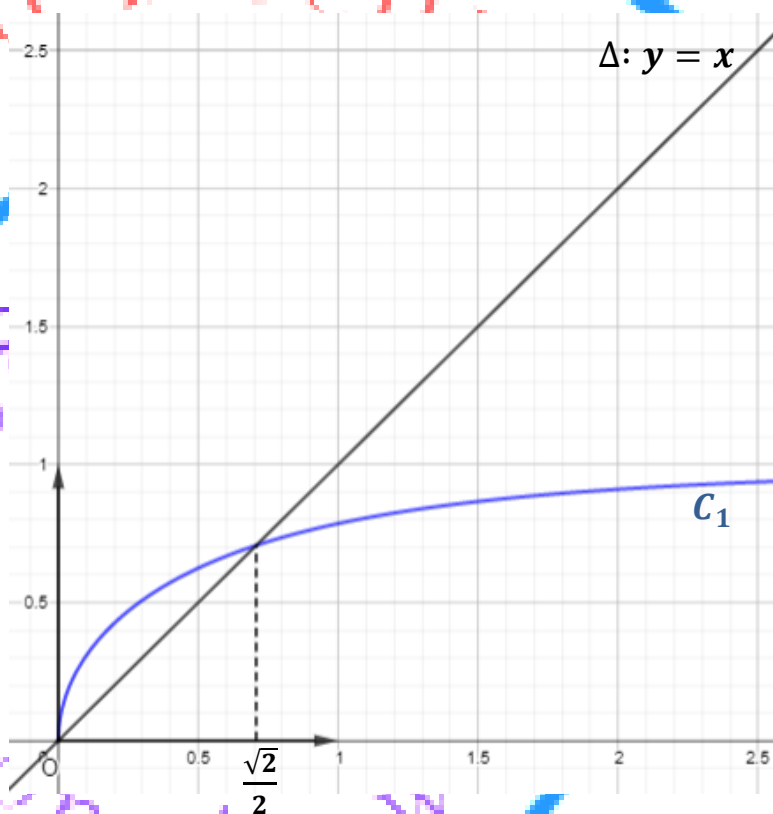
* La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale é la courbe C_1 au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que pour $x \in [0, +\infty[$ on a : $f(x) = g^{-1}(x)$.

b) Construire C_g dans le même repère.

c) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par C_1 , C_g et les droites d'équations

respectives $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Calculer \mathcal{A}



Exercice 15

A) Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} , par :

$$U_0 = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \int_0^1 x^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

1) a) Calculer U_0 et U_1

b) En utilisant deux intégrations par parties montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$U_{n+2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2} U_n$$

c) Calculer U_2 et U_3

2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

B) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $V_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

1) a) Montrer que la suite (V_n) est décroissante.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{5n^5}$

c) Déterminer alors la limite de la suite (V_n) .

2) Soit la suite (W_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $W_n = \int_{\frac{(-1)^n}{n}}^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} x^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

a) Exprimer W_{2n+1} en fonction de V_{2n+1}

b) Exprimer W_{2n} en fonction de V_{2n}

c) Déterminer alors la limite de la suite (W_n) .

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = -1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) En déduire le signe de $f(x)$ pour tout réel x strictement positif.

2) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $h(x) = \sqrt{x^2+2x} - x + 1$ et soit G la fonction

définie sur \mathbb{R}_+ par $G(x) = \int_0^x t h(t) dt$

a) Etudier la dérivabilité de h à droite en 0.

b) Dresser le tableau de variation de h .

3) Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R}_+ et calculer $G'(x)$.

a) Montrer que pour tout réel x positif on a : $G(x) \geq \frac{1}{2}x^2$

b) En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$

e) Dresser le tableau de variation de G et donner l'allure de la courbe C_G de G .

Exercice 17

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ et soit C_f sa courbe représentative

(unité graphique 2 cm)

On donne la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = \int_0^{\sqrt{\sin x}} f(t) dt$.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f .
- b) Montrer que F est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.
- c) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $F(x) = \frac{x}{2}$
- 2) Calculer alors \mathcal{A} la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 18

- 1) a) Dresser le tableau de variation de la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par : $\varphi(t) = t(1 - t)$.
- b) En déduire que pour tout réel $t \in [0, 1]$ on a : $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{4}$
- 2) On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$

Soit la fonction G définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F\left(\frac{1 - \tan x}{2}\right)$.

- a) Vérifier que la fonction F est bien définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} , et déterminer sa fonction dérivée.
- b) Vérifier que $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F(1)$.
- c) Calculer $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
- 3) a) Déterminer $G'(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $G(x) = -x + F(1) - \frac{\pi}{4}$
- c) En déduire que $\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{\pi}{2}$
- 4) On considère la suite (I_n) définie sur \mathbb{N}^* par $I_0 = 1$ et pour tout \mathbb{N}^* , on a :

$$I_n = \int_0^1 t^n (1 - t)^n dt$$

- a) Calculer I_1
- b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$
- c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

5) On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_n = \sum_{k=1}^n 2^k I_k$

a) On pose pour tout réel $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$W_n = 2t(1-t) + 2^2 t^2 (1-t)^2 + 2^3 t^3 (1-t)^3 + \dots + 2^n t^n (1-t)^n$$

Montrer que $W_n = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul on a : $\left| U_n + 1 - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 19

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $U_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

Pour tout $x \in [0, 1]$ on pose $f_n(x) = x(1-x^2)^{n+1}$

1) Calculer U_1 puis vérifier que $U_2 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

2) a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n on a : $U_n - U_{n+1}$

$$= \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$$

b) Calculer pour tout $x \in [0, 1]$, $f'_n(x)$

c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a : $U_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} U_n$

d) Montrer, alors par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$U_n = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2n}{2n+1}$$

3) Soient les fonctions F_n et G_n définies sur \mathbb{R} et pour entier naturel non nul n par :

$$F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1-t^2)^n dt \text{ et } G_n(x) = \int_0^x \cos^{2n+1} t dt$$

a) Calculer pour tout réel x , $F'_n(x)$ et $G'_n(x)$ et en déduire que pour tout réel x ,

$$F_n(x) = G_n(x)$$

b) Montrer alors que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t dt = \frac{16}{35}$