

**Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \cos x$ .

- 1) a) Calculer  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ;  $f'(x)$ .  
 b) Justifier que  $f$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[0, 1]$ .

2) Soit  $g$  la fonction réciproque de  $f$ .

- a) Justifier que  $g$  est dérivable sur  $[0, 1[$ .  
 b) Montrer que  $\forall x \in [0, 1[$  :  $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) a) Calculer  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

- b) Montrer que  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

**Exercice 2**

Indiquer la bonne réponse

1) Soit  $I = \int_0^1 2t \cos^2(\pi t) dt$  et  $J = \int_0^1 2t \sin^2(\pi t) dt$  alors  $I + J =$

- a)  $-1$                                       b)  $1$                                       c)  $\pi$

2) Soit  $K = \int_0^\pi \sin^2 x dx$  alors  $K =$

- a)  $0$                                       b)  $\frac{\pi}{2}$                                       c)  $\pi$

**Exercice 3**

Soit la suite réelle  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$ , par :  $I_n = \int_0^1 x^{2n+1} \sin(\pi x) dx$

- 1) Montrer que  $I_0 = \frac{1}{\pi}$   
 2) a) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante.  
 b) En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.  
 c) Montrer que tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .  
 3) a) Montrer que tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $I_{n+1} = \frac{1}{\pi} - \frac{(2n+2)(2n+3)}{\pi^2} I_n$

- b) Calculer alors  $J = \int_0^1 (x^3 - 3x) \sin(\pi x) dx$

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-2, 2]$  par  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

On se propose de calculer  $\mathcal{A}$  la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par  $C_f$  l'axe des abscisses et les droites d'équations :  $x = -1$  et  $x = 1$ .

1) a) Etudier la parité de  $f$ .

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $-2$  et à gauche en  $2$ . Interpréter les résultats graphiquement.

c) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] -2, 2[$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ] -2, 2[$ .

d) Dresser le tableau de variation de  $f$  et tracer  $C_f$ .

2) Soit  $F$  la fonction définie sur  $[-2, 2]$  par  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

Soit  $G$  la fonction définie sur  $[0, \pi]$  par :  $G(x) = F(2 \cos x)$ .

a) Déterminer  $F(0)$

b) Montrer que  $G$  est dérivable sur  $[0, \pi]$  et calculer  $G'(x)$  pour tout  $x \in [0, \pi]$ .

c) Calculer  $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$  et en déduire que  $\forall x \in [0, \pi]$  on a :  $G(x) = -2x + \sin(2x) + \pi$ .

3) a) Calculer  $F\left(2 \cos \frac{\pi}{3}\right)$

b) Calculer alors  $\mathcal{A}$ .

### Exercice 5

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1[$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $0$  et interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

d) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a :  $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e) Construire  $C_f$  et  $C'$  la courbe représentative de  $f^{-1}$ .

2) Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $C_f$  et les droites d'équations

$x = 0$  et  $y = 1$  Montrer que  $A = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$

3) On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$

a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante. En déduire que  $(U_n)$  est convergente.

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

4) On considère la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a) Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $V_n - I = (-1)^n U_n$  où  $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ; on a :  $|V_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$  puis déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

5) Soit  $\varphi$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $F$  la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par  $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$

a) Montrer  $F$  est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et que  $F'(x) = \varphi(\tan x)$

b) Déterminer  $F(x)$  dans chacun des cas suivants  $\varphi(t) = 1$  et  $\varphi(t) = t^2$

c) En déduire que  $I = \frac{\pi}{4}$  et déterminer la valeur exacte de  $A$ .

### Exercice 6

Soit la suite réelle  $U$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

1) a) Justifier l'existence de  $U_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$ .

c) Montrer que la suite  $U$  est décroissante. Que peut-on conclure ?

d) Vérifier que :  $U_1 = 1$  et que  $U_2 = \frac{\pi}{4}$ .

2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x dx = \frac{1}{n+1} U_{n+2}$$

b) En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$ .

c) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$  on a :  $\frac{n}{n+1} U_n \leq U_{n+1} \leq U_n$

En déduire la limite de  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ .

3) a) Montrer par récurrence que : pour tout  $n \geq 2$  on a :  $n U_n U_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

b) En déduire la limite de la suite  $U$ .

### Exercice 7

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , par  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

1) a) Dresser le tableau de variation de  $f$  et tracer  $C_f$ .

b) Justifier que pour tout  $t \geq 0$  on a :  $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq 1$

2) On pose  $F(x) = \int_0^x f(t) dt, \forall x \geq 0$ .

a) Etudier la dérivabilité de  $F$  et en déduire que  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  on a :  $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $F$ .

3) Soit  $G$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $G(x) = F(x^2)$ .

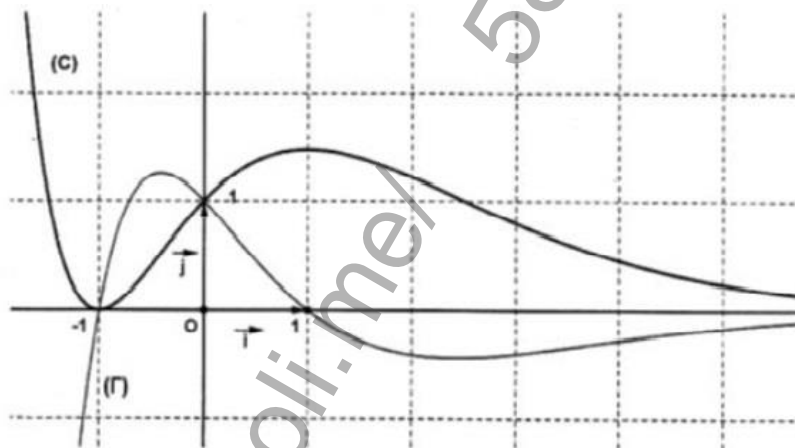
a) Montrer que  $G$  est dérivable à droite en  $0$ .

b) Etudier les variations de  $G$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Donner l'allure de la courbe de  $C_G$  de  $G$ .

### Exercice 8

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les courbes  $(C)$  et  $(\Gamma)$ , représentative d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et de sa fonction dérivée  $f'$ .



1) Reconnaître la courbe représentative de  $f$  et celle de  $f'$ .

2) Déterminer  $(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f(-1)$  et  $f'(-1)$ .

3) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe de  $f'$  l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$

4) Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $U_n = \int_0^1 x^n f'(x) dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que  $U_1 = f(1) - \int_0^1 f(x) dx$

b) Montrer que  $(U_n)$  est décroissante

c) Montrer que  $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

d) Déduire que  $(U_n)$  est convergente et calculer sa limite.

### Exercice 9

A) On pose  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de  $F$ .

2) Etudier la dérivabilité de  $F$  et en déduire que  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

3) On pose  $g(x) = F(\tan x)$  ;  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

a) Calculer  $g(0)$ .

b) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et calculer  $g'(x)$ .

c) En déduire que  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ ; F(\tan x) = x$ .

4) a) Montrer que  $F$  est la fonction réciproque de la fonction  $f(x) = \tan x$ .

b) Calculer  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$  et  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ .

B) Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1) Montrer que pour tout réel  $x : 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

2) En déduire que  $U_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$

3) a) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$

b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $|U_n - \frac{\pi}{4}| \leq \frac{1}{2n+3}$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

### Exercice 10

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative unité graphique

2 cm

1) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Tracer  $C_f$ .

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  par :  $g(x) = \int_0^{\tan^2 x} f(t) dt$

a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  et que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

on a :  $g'(x) = 4\tan^2 x$

b) En déduire l'expression de  $g(x)$ .

c) Déterminer l'aire  $A$  de la partie du plan limitée par  $C_f$  l'axe  $(O, \vec{i})$  et les droites d'équations :  $x = 0$  et  $x = 1$

3) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\sqrt{k}}{n+k} \right)$

a) Montrer que pour tout  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

b) En déduire pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $S_n - \frac{1}{n} \leq A \leq S_n$

b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

### Exercice 11

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 2]$  par :  $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

1) a) Montrer que la droite  $\Delta: x = 1$  est axe de symétrie de  $C_f$ .

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de  $C_f$ . d) Construire  $C_f$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  par :  $F(x) = \int_0^{1+\sin x} f(t) dt$

a) Justifier l'existence de  $F(x)$ .

b) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et calculer  $F'(x)$  pour tout  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

c) Expliciter  $F(x)$  pour tout  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $C_f$  et l'axe des abscisses.

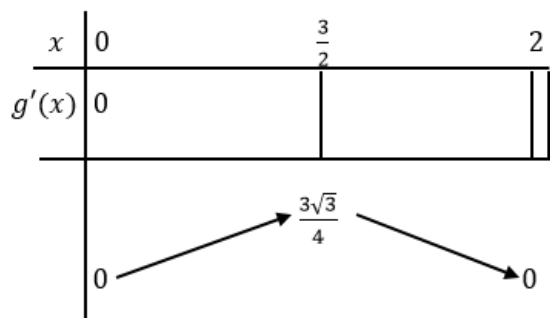
4) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, 2]$  par :  $g(x) = x\sqrt{x(2-x)}$  et soit  $C_g$  sa courbe représentative. On

donne ci-contre le tableau de variation de  $g$ .

a) Etudier la position de  $C_f$  et  $C_g$ .

b) Construire  $C_g$  dans le même repère que  $C_f$ .

c) Calculer l'aire du domaine plan limitée par  $C_f$  et  $C_g$ .



### Exercice 12

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, 4[$  par :  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

1) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, 4[$  et que  $\forall x \in ]0, 4[$  on a :  $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{4x-x^2})^3}$

b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

c) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, 4[$  sur  $\mathbb{R}$ .

3) a) Montrer que le point  $A(2, 0)$  est un centre de symétrie de  $C_f$ .

b) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  en  $A$ .

4) On suppose que le point  $I$  d'abscisse  $\alpha$ , ( $\alpha \approx 3,9$ ) est l'unique point d'intersection de la courbe  $C_f$  et la droite  $\Delta: y = x$ .

a) Tracer  $C_f$  et  $T$ .

b) Soit  $f^{-1}$  la réciproque de  $f$  et soit  $C_{f^{-1}}$  sa courbe

Tracer  $C_{f^{-1}}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5) Calculer  $\mathcal{A}$  la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \alpha$ .

### Exercice 13

A) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

b) Tracer la courbe  $C_f$  de  $f$ .

c) Montrer graphiquement que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution.

2) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $]1, 2]$ .

b) Calculer  $f^{-1}(x)$  en fonction de  $x$ .

c) Tracer  $C'$  la courbe de  $f^{-1}$ .

3) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par :  $g(x) = \tan x$

a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

b) Calculer  $g^{-1}(0)$  et  $g^{-1}(1)$ .

c) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ , calculer  $(g^{-1})'(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

4) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine plan limité par la courbe  $C_f$  et les droites d'équations :

$x = 0$  et  $x = 1$ .

### Exercice 14

Soit  $h$  une fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $h(x) = \sqrt{1-x^2}$  et soit  $C_h$  sa courbe

1) Soit  $M(x, y)$  un point de  $C_h$  avec  $y = h(x)$

a) Montrer que  $OM = 1$

b) En déduire que  $C_h$  est un arc du cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

c) Soit  $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  montrer que  $I = \frac{\pi}{4}$

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$  et soit  $C_f$  sa courbe

a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0

b) Dresser le tableau de variations de  $f$  et tracer  $C_f$  (unité graphique 4 cm)

3) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque que l'on note  $g$  définie sur  $[0, 1]$

b) Tracer  $C_f$  et  $C_g$  la courbe représentative de  $g$

d) Montrer que  $\forall x \in [0, 1], g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$

4) Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par  $C_f$  et  $C_g$

et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$

Calculer  $A$  puis déterminer  $\int_0^1 f(x) dx$

5) Soit la suite  $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) A l'aide d'une intégration par partie montrer que  $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}$

b) Calculer  $I_0$  et calculer  $\int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$  et  $\int_0^1 (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt$

### Exercice 15

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1[$  par  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$  on a :  $f'(x) = \frac{2x-x^3}{(\sqrt{1-x^2})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que

l'on déterminera.

d) Construire  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  courbe de  $f^{-1}$ .

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

3) Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  par :  $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$

a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  et calculer  $F'(x)$  pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

b) En déduire que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$  on a :  $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$

c) Calculer alors  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$

d) En déduire que  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = \frac{\pi-2}{8}$

4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  et les droites d'équations

$$x=0 \text{ et } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

### Exercice 16

A) Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$ , par :

$$U_0 = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \int_0^1 x^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

1) a) Calculer  $U_0$  et  $U_1$

b) En utilisant deux intégrations par parties montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;



$$U_{n+2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2} U_n$$

c) Calculer  $U_2$  et  $U_3$

2) a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante.

b) Montrer que  $\forall n \geq 1$  on a :  $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$ .

B) Soit la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $V_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

1) a) Montrer que la suite  $(V_n)$  est décroissante.

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq V_n \leq \frac{1}{5n^5}$

c) Déterminer alors la limite de la suite  $(V_n)$ .

2) Soit la suite  $(W_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $W_n = \int_{\frac{(-1)^n}{n}}^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} x^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

a) Exprimer  $W_{2n+1}$  en fonction de  $V_{2n+1}$

b) Exprimer  $W_{2n}$  en fonction de  $V_{2n}$

c) Déterminer alors la limite de la suite  $(W_n)$ .

### Exercice 17

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $f(x) = -1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

1) a) Dresser le tableau de variation de  $f$

b) En déduire le signe de  $f(x)$  pour tout réel  $x$  strictement positif.

2) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $h(x) = \sqrt{x^2+2x} - x + 1$  et soit  $G$  la fonction

définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $G(x) = \int_0^x t h(t) dt$

a) Etudier la dérivabilité de  $h$  à droite en 0.

b) Dresser le tableau de variation de  $h$ .

3) Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et calculer  $G'(x)$ .

a) Montrer que pour tout réel  $x$  positif on a :  $G(x) \geq \frac{1}{2}x^2$

b) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$

e) Dresser le tableau de variation de  $G$  et donner l'allure de la courbe  $C_G$  de  $G$ .

### Exercice 18

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative

(unité graphique 2 cm)

On donne la fonction  $F$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par :  $F(x) = \int_0^{\sqrt{\sin x}} f(t) dt$ .

1) a) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

b) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et calculer  $F'(x)$ .

c) En déduire que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  on a :  $F(x) = \frac{x}{2}$

2) Calculer alors  $\mathcal{A}$  la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $C_f$  et les droites

d'équations  $x = 0$  et  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

### Exercice 19

1) a) Dresser le tableau de variation de la fonction  $\varphi$  définie sur  $[0, 1]$  par :  $\varphi(t) = t(1-t)$ .

b) En déduire que pour tout réel  $t \in [0, 1]$  on a :  $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{4}$

2) On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$

Soit la fonction  $G$  définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par :  $G(x) = F\left(\frac{1-\tan x}{2}\right)$ .

a) Vérifier que la fonction  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et déterminer sa fonction dérivée.

b) Vérifier que  $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F(1)$ .

c) Calculer  $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

3) a) Déterminer  $G'(x)$  pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

b) Montrer que pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on a :  $G(x) = -x + F(1) - \frac{\pi}{4}$

c) En déduire que  $\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{\pi}{2}$

4) On considère la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $I_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$

a) Calculer  $I_1$

b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$  c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

5) On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_n = \sum_{k=1}^n 2^k I_k$

a) On pose pour tout réel  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$W_n = 2t(1-t) + 2^2 t^2(1-t)^2 + 2^3 t^3(1-t)^3 + \dots + 2^n t^n(1-t)^n$$

$$\text{Montrer que } W_n = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}$$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul on a :  $\left|U_n + 1 - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}$

c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

### Exercice 20

Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ .

Pour tout  $x \in [0, 1]$  on pose  $f_n(x) = x(1 - x^2)^{n+1}$

1) Calculer  $U_1$  puis vérifier que  $U_2 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

2) a) Justifier que pour tout entier naturel non nul  $n$  on a :  $U_n - U_{n+1} = \int_0^1 x^2(1 - x^2)^n dx$

b) Calculer pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f'_n(x)$

c) En déduire que pour tout entier naturel non nul  $n$  on a :  $U_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} U_n$

d) Montrer, alors par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$  on a :

$$U_n = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2n}{2n+1}$$

3) Soient les fonctions  $F_n$  et  $G_n$  définies sur  $\mathbb{R}$  et pour entier naturel non nul  $n$  par :

$$F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1 - t^2)^n dt \quad \text{et} \quad G_n(x) = \int_0^x \cos^{2n+1} t dt$$

a) Calculer pour tout réel  $x$ ,  $F'_n(x)$  et  $G'_n(x)$  et en déduire que pour tout réel  $x$

$$F_n(x) = G_n(x)$$

b) Montrer alors que :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t dt = \frac{16}{35}$