INTEGRALES 4$^{\text{ème}}$ Mathématiques

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x$.

1) a) Calculer $\forall x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x)$.

b) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0\,,1]$.

2) Soit g la fonction réciproque de f.

a) Justifier que g est dérivable sur $[0\,,1[$.

b) Montrer que $\forall x \in [0\,,1[: g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) a) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

Exercice 2

Indiquer la bonne réponse

1) Soit $I = \int_0^1 2t\cos^2(\pi t)dt$ et $J = \int_0^1 2t\sin^2(\pi t)dt$ alors $I + J =$

a) -1 b) 1 c) π

2) Soit $K = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$ alors $K =$

a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) π

Exercice 3

Soit la suite réelle (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}\sin(\pi x)\,dx$

1) Montrer que $I_0 = \frac{1}{\pi}$

2) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

c) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le I_n \le \frac{1}{2n+2}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3) a) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_{n+1} = \frac{1}{\pi} - \frac{(2n+2)(2n+3)}{\pi^2} I_n$

b) Calculer alors $J = \displaystyle\int_0^1 (x^3 - 3x)\sin(\pi x)\,dx$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-2\,,2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

On se prose de calculer $\mathscr{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

1) a) Etudier la parité de f.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2 et à gauche en 2. Interpréter les résultats graphiquement.

c) Montrer que f est dérivable sur $]-2\,,2[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in\,]-2\,,2[$.

d) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f.

2) **Soit** F la fonction définie sur $[-2\,,2]$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$

Soit G la fonction définie sur $[0\,,\pi]$ par : $G(x) = F(2\cos x)$.

a) Déterminer $F(0)$

b) Montrer que G est dérivable sur $[0\,,\pi]$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in [0\,,\pi]$.

c) Calculer $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et en déduire que $\forall x \in [0\,,\pi]$ on a : $G(x) = -2x + \sin(2x) + \pi$.

3) **a)** Calculer $F\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)$

b) Calculer alors $\mathscr{A}$.

Exercice 5

Soit la suite réelle U définie sur IN^* par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x\, dx$

1) **a)** Justifier l'existence de U_n pour tout $n \in IN^*$.

b) Montrer que $\forall n \in IN^*\,, U_n \geq 0$.

c) Montrer que la suite U est décroissante. Que peut-on conclure ?

d) Vérifier que : $U_1 = 1$ et que $U_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) **a)** A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, cos^2 x\, dx = \frac{1}{n+1} U_{n+2}$$

b) En déduire $\forall n \in IN^*$ on a : $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, U_n$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1}\, U_n \leq U_{n+1} \leq U_n$

En déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

3) **a)** Montrer par récurrence que : pour tout $n \geq 2$ on a : $nU_n\, U_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

b) En déduire la limite de la suite U.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, par $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f.

b) Justifier que pour tout $t \geq 0$ on a : $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq 1$

2) On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ ,\ \ \forall x \geq 0$.

a) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de F.

3) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = F(x^2)$.

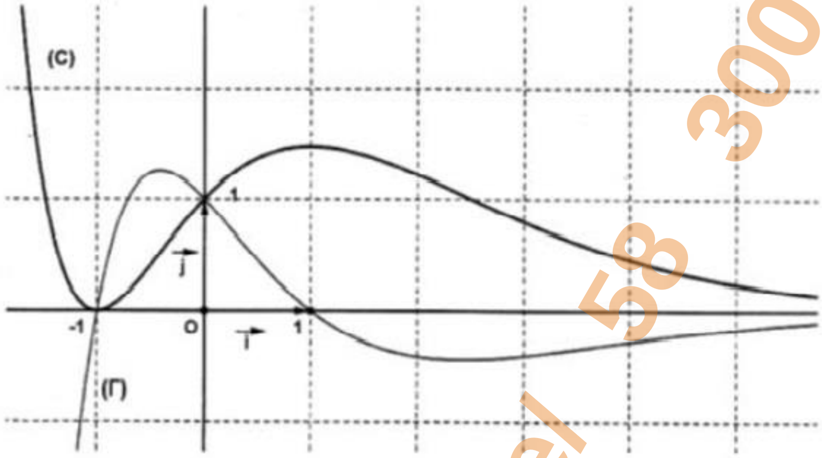
a) Montrer que G est dérivable à droite en 0.

b) Etudier les variations de G sur $\mathbb{R}$.

c) Donner l'allure de la courbe de C_G de G.

Exercice 7

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ les courbes (C) et (Γ), représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f'.



1) Reconnaitre la courbe représentative de f et celle de f'.

2) Déterminer (0) , $f'(0)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$.

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f' l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

4) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^1 x^n f'(x)\ dx$

a) A l'aide d'une intégration par partie montrer que $U_1 = f(1) - \int_0^1 f(x)\ dx$

b) Montrer que (U_n) est décroissante

c) Montrer que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) Déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 8

A) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de F.

2) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) On pose $g(x) = F(\tan x)$; $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Calculer $g(0)$.

b) Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; $F(\tan x) = x$.

4) **a)** Montrer que F est la fonction réciproque de la fonction $f(x) = \tan x$.

b) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ *et* $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

c) Calculer $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$.

B) Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par : $U_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1) Montrer que pour tout réel x : $1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

2) En déduire que $U_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$

3) **a)** Montrer que pour tout $x \in [0\ ,\ 1]$ et pour tout $n \in IN^*$; $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$: $\left|U_n - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$ et déterminer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et soit C_f sa courbe (unité graphique 2 cm)

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer C_f.

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \int_0^{tan^2 x} f(t)\ dt$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g'(x) = 4tan^2 x$

b) En déduire l'expression de $g(x)$.

c) Déterminer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f l'axe $(O\,,\vec{\imath}\,)$ et les droites d'équations :

$x = 0$ et $x = 1$

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\sqrt{k}}{n+k}\right)$

a) Montrer que pour tout $k \in \{0,1\,,2 \ldots n-1\}$on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n - \frac{1}{n} \leq \mathrm{A} \leq S_n$.

c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $[0\,,2]$ par : $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que la droite $\Delta: x = 1$ est axe de symétrie de C_f.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de C_f.

d) Construire C_f.

2) Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = \int_0^{1+\sin x} f(t)\ dt$

a) Justifier l'existence de $F(x)$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et l'axe des abscisses.

4) Soit g la fonction définie sur $[0, 2]$ par : $g(x) = x\sqrt{x(2-x)}$ et soit C_g sa courbe représentative. On donne ci-contre le tableau de variation de g.

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$g'(x)$	0				$\Vert$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

a) Etudier la position de C_f et C_g..

b) Construire C_g dans le même repère que C_f.

c) Calculer l'aire du domaine plan limitée par C_f et C_g.

<u>Exercice 11</u>

Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ et soit C_f sa courbe (unité graphique 2 cm).

Soit la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $\mathrm{g(x)} = \int_0^{\sqrt{\sin x}} f(t)\ dt$.

1) a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer g'(x) pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\mathrm{g(x)} = \frac{x}{2}$

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) On pose $\varphi(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\sin x}} \frac{\sqrt{1-t^4}}{t^3}\ dt$.

a) Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$

on a : $\varphi(x) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-x-\cot x}{2}$

c) Déterminer alors la valeur de $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $]0\,,4[$ par : $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** Montrer que f est dérivable sur $]0\,,4[$ et que $\forall x \in\,]0\,,4[$ on a : $f'(x)=\frac{4}{\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de $]0\,,4[$ sur $\mathbb{R}$.

3) **a)** Montrer que le point $A(2\,,0)$ est un centre de symétrie de C_f.

b) Ecrire une équation de la tangente T à C_f en A.

4) On suppose que le point I d'abscisse , $(\alpha \simeq 3{,}9)$ est l'unique point d'intersection de la courbe C_f et la droite Δ: $y=x$.

a) Tracer C_f et T.

b) Soit f^{-1} la réciproque de f et soit $C_{f^{-1}}$ sa courbe. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O\,\vec{i}\,,\vec{j})$.

5) Calculer $\mathscr{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

Exercice 13

A) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$

1) **a)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

b) Tracer la courbe C_f de f.

c) Montrer graphiquement que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution.

2) **a)** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]1\,,2]$.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

c) Tracer C' la courbe de f^{-1}.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=\tan x$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0\,,+\infty[$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x\in[0\,,+\infty[$.

4) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe C_f et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et soit C_f sa courbe représentative unité graphique 2 cm

1) **a)** Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer C_f.

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=\int_0^{\tan^2 x} f(t)\;dt$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g'(x)=4\tan^2 x$

b) En déduire l'expression de $g(x)$.

c) Déterminer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f l'axe $(O\,,\vec{\imath}\,)$ et les droites d'équations :
$x=0$ et $x=1$

3) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}}{n+k}\right)$

a) Montrer que pour tout $k\in\{0,1\,,2\,...\,n-1\}$on a : $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\;dt\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

b) En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $S_n-\frac{1}{n}\leq \mathrm{A}\leq S_n$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

<u>Exercice 15</u>

Soit f la fonction définie sur $[0\,,2]$ par : $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que la droite Δ: $x=1$ est axe de symétrie de C_f.

b) Etudier la dérivabilité de à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de C_f.

d) Construire C_f.

2) Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x)=\int_0^{1+\sin x} f(t)\;dt$

a) Justifier l'existence de $F(x)$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Expliciter $F(x)$ pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

3) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et l'axe des abscisses.

4) Soit g la fonction définie sur $[0\,,2]$ par : $g(x)=x\sqrt{x(2-x)}$ et soit C_g sa courbe représentative. On donne ci-contre le tableau de variation de g.

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$g'(x)$	0				$\Vert$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

a) Etudier la position de C_f et C_g..

b) Construire C_g dans le même repère que C_f.

c) Calculer l'aire du domaine plan limitée par C_f et C_g.

Exercice 16

Soit h une fonction définie sur $[0\,,1]$ par $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ et soit C_h sa courbe représentative

1) Soit $M(x\,,y)$ un point de C_h avec $y=h(x)$

a) Montrer que $OM=1$

b) En déduire que C_h est un arc du cercle de centre O et de rayon 1.

c) Soit $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ montrer que $I=\frac{\pi}{4}$

2) Soit f la fonction définie sur $[0\,,1]$ par $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

b) Dresser le tableau de variations de f et tracer C_f (unité graphique 4 cm)

3) **a)** Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on note g définie sur $[0\,,1]$

b) Tracer C_f et C_g la courbe représentative de g

d) Montrer que $\forall\in[0\,,1]\,,\,g(x)=1-\sqrt{1-x^2}$

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par C_f et C_g et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

Calculer A puis déterminer $\int_0^1 f(x)dx$

5) Soit la suite $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}dt\quad\forall n\in IN$

a) A l'aide d'une intégration par partie montrer que $I_{n+1}=\frac{n}{n+3}I_{n-1}$

b) Calculer I_0 et calculer $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt$ *et* $\int_0^1(1-t^2)\sqrt{1-t^2}dt$

Exercice 17

A) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $U_n=\int_0^1 x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$

1) **a)** Calculer U_0 et U_1

b) En utilisant deux intégrations par parties montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+2}=\frac{2}{\pi}-\frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2}U_n$

c) Calculer U_2 et U_3

2) **a)** Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) Montrer que $\forall n\geq 1$ on a : $0\leq U_n\leq\frac{1}{n+1}$

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

B) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n=\int_0^{\frac{1}{n}}x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$

1) **a)** Montrer que la suite (V_n) est décroissante.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a : $0\leq V_n\leq\frac{1}{5n^5}$

c) Déterminer alors la limite de la suite (V_n).

2) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \int_{\frac{(-1)^n}{n}}^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} x^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

a) Exprimer W_{2n+1} en fonction de V_{2n+1}

b) Exprimer W_{2n} en fonction de V_{2n}

c) Déterminer alors la limite de la suite (W_n).

Exercice 18

Soit g la fonction définie sur $[0\,,1[$ par $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ et soit C_g sa courbe représentative.

1) a) Montrer que g réalise une bijection de $[0\,,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) A l'aide d'une intégration par partie montrer que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g(x)\, dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}$

2) a) Soit $F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt$ $x \in [0\,,1]$, montrer que F est dérivable sur $[0\,,1]$ et calculer $F'(x)$.

b) Soit la fonction G définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ par $G(x) = F(\sin x)$

Montrer que G est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $G'(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$, on a : $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$ puis $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{g}(\mathrm{x})\, dx$.

3) On a représenté ci-dessous la courbe C_1 de la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+\sqrt{x^2+4}}}$

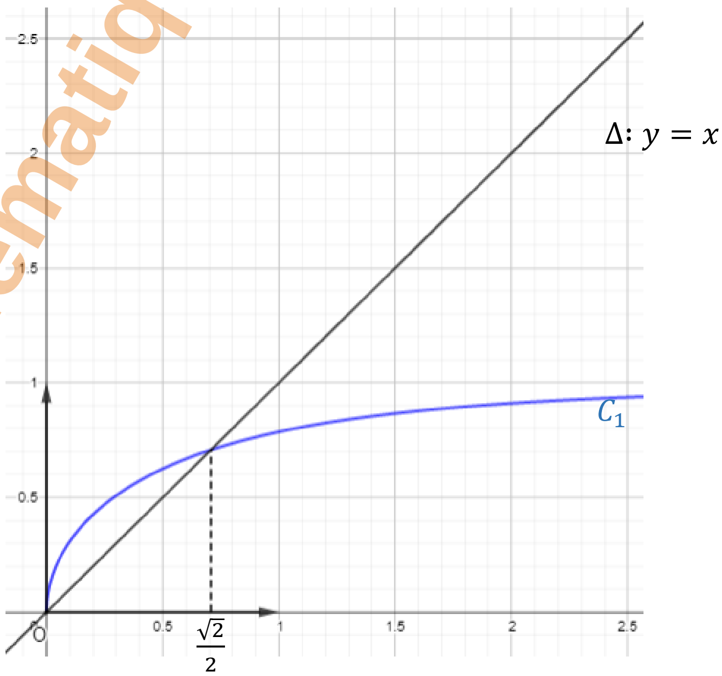
* La courbe C_1 admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

* La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale é la courbe C_1 au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que pour $x \in [0\,,+\infty[$ on a : $f(x) = g^{-1}(x)$.

b) Construire C_g dans le même repère.

c) Calculer $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan par C_1 , C_g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Exercice 19

Soit f la fonction définie sur IR_*^+ par : $f(x) = -1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

1) **a)** Dresser le tableau de variation de f

b) En déduire le signe de $f(x)$ pour tout réel x strictement positif.

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = \sqrt{x^2+2x} - x + 1$ et G la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$G(x) = \int_0^x t\, h(t)dt$

a) Etudier la dérivabilité de h à droite en 0.

b) Dresser le tableau de variation de h.

3) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $G'(x)$.

a) Montrer que pour tout réel x positif on a : $G(x) \geq \frac{1}{2}x^2$

b) En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x}$

e) Dresser le tableau de variation de G et donner l'allure de la courbe C_G de G.

Exercice 20

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ et soit C_f sa courbe représentative (unité graphique $2\ cm$)

On donne la fonction F définie sur $]-\pi\,,\pi[$ par : $F(x) = \int_0^{\sqrt{\sin x}} f(t)dt.$

1) **a)** Déterminer le domaine de définition de f.

b) Montrer que F est dérivable sur $]-\pi\,,\pi[$ et calculer $F'(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in\,]-\pi\,,\pi[$ on a : $F(x) = \frac{x}{2}$

2) Calculer alors $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations

$x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 21

1) **a)** Etudier le sens de variation de la fonction φ définie sur $[0\,,1]$ par : $\varphi(t) = t(1-t)$.

b) En déduire que pour tout réel $t \in [0\,,1]$ on a : $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{4}$

2) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$

Soit la fonction G définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F\left(\frac{1-\tan x}{2}\right)$.

a) Vérifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa fonction dérivée.

b) Vérifier que $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F(1)$.

c) Calculer $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

3) **a)** Déterminer $G'(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $G(x) = -x + F(1) - \frac{\pi}{4}$

c) En déduire que $\int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1} = \frac{\pi}{2}$

4) On considère la suite (I_n) définie par : $I_0 = 1$ et $\forall \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$.

a) Calculer I_1

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

5) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k I_k$

a) Montrer que pour tout réel $t \in [0\,,1]$ on a :

$$2t(1-t) + 2^2t^2(1-t)^2 + 2^3t^3(1-t)^3 + \cdots + 2^nt^n(1-t)^n = \frac{1}{2t^2-2t+1} - 1 - \frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}$$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul on a : $\left|U_n + 1 - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.