Identité de Bézout 4ème Mathématiques

Exercice 1

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E): $4x-5y=1$.

a) Vérifier que $(-1\,,-1)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E).

2) Soit a, b et n trois entiers naturels tels que : $a=4n+3$ et $b=3n+1$, on pose $d=a\wedge b$.

a) Déterminer les valeurs possible de d.

b) Montrer que $d=5$ si et seulement si, $n\equiv 3\ (mod\ 5)$.

3) **a)** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes modulo 5 de 2^n.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $2^a+3^b\equiv 3(1+2^n)\ (mod\ 5)$

c) Déterminer le plus petit entier naturel $n\geq 2013$ tels que : $\begin{cases} a\wedge b=5 \\ 2^a+3^b\equiv 0\ (mod\ 5)\end{cases}$.

Exercice 2

1) Soit , dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E): $1312x-1755y=1$

a) Prouver que (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$.

b) Déterminer une solution particulière de (E). Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation (E).

2) a) Déterminer , suivant les valeurs de n , les restes modulo 10 de 7^n

b) En déduire le chiffre des unités de 2007^{2011} .

3) Soit ,dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E'): $5x-7y=2016$:.

a) Montrer que pour tout couple (x,y) solution de (E') , x est divisible par 7.

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E').

Exercice 3

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : (E): $3x-8y=5$.

Montrer que les solutions de (E) sont les couples $(x\,,y)$ tels que : $x=8k-1$ et $y=3k-1$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2) **a)** Soit n, x et y trois entiers tels que : $\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7\end{cases}$ montrer que $(x\,,y)$ est une solution de (E).

b) On considère le système S: $\begin{cases} n\equiv 2\ (mod\ 3) \\ n\equiv 7\ (mod\ 8)\end{cases}$ où n est un entier.

Montrer que n est une solution de (S) si et seulement si $n\equiv 23\ (mod\ 24)$.

3) **a)** Soit k un entier naturel. Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $1991^{2008}-1$ est divisible par 24.

Exercice 4

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E_1): $11x+8y=79$.

a) Montrer que si $(x\,,y)$ est solution de (E_1) alors $y\equiv 3\ (mod\ 11)$.

b) Résoudre l'équation (E_1).

2) Soit dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E_2): $3y+11z=372$.

a) Montrer que si $(y\,,z)$ est solution de (E_2) alors $z\equiv 0\ (mod\ 3)$.

b) Résoudre l'équation (E_2).

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E_3) : 3x - 8z = -24$.

4) Le prix totale de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de 480 dinars

Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 dinars

Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 36 dinars

Le prix d'une pièce du troisième lot est de 4 dinars

Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice 5

1) On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$; où $(x\,, y) \in Z^2$.

a) Donner une solution particulière de (E).

b) Résoudre dans Z^2 l'équation (E).

2) Soit n un entier naturel tel qu'il existe deux entiers naturels a et b vérifiant :

$n = 8a + 1$ et $n = 5b + 2$

a) Montrer que $(a\,, -b)$ est une solution de (E).

b) En déduire le reste modulo 40 de n.

3) **a)** Résoudre dans Z^2 l'équation $8x + 5y = 100$.

b) Un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge; les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 6

1) a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5

c) En déduire que $6^{40} - 1 \equiv 0(mod\ 11)$ et $6^{40} - 1 \equiv 0(mod\ 5)$

d) En déduire que $6^{40} - 1$ est divisible par 55

2) Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a) Montrer que l'équation $(E) : 65x - 40\,y = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

b) Montrer que l'équation $(E') : 17x - 40\,y = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$

c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de (E').

d) Résoudre (E').

Prouver qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1(mod\ 40)$, trouver cet entier

3) Pour tout entier naturel a, démontrer que si : $a^{17} \equiv b(mod\ 55)$ et $a^{40} \equiv 1(mod\ 55)$

alors $b^{33} \equiv a(mod\ 55)$

Exercice 7

1) Démontrer les propositions suivantes :

a) $2^{340} \equiv 1(mod\ 11)$

b) Pour tout entier naturel n ; 9 divise $7^{3n} - 1$.

c) Pour tout entier naturel n ; $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

2) **a)** Donner suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 2^n par 7.

b) En déduire que si n est un multiple de 3 alors $2^{n+2} + 2^{n+1} + 1$ est divisible par 7.

Exercice 8

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.

1) **a)** Montrer que n et $2n + 1$ sont premier entre eux.

b) En déduire que : si d est un diviseur de $2n + 1$ alors n et d sont premier entre eux.

2) On pose $\alpha = n + 3$; $\beta = 2n + 1$ et $d_1 = \alpha \wedge \beta$.

a) Calculer $2\alpha - \beta$, en déduire les valeurs possibles de d_1.

b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 ssi $(n - 2)$ est un multiple de 5.

3) On considère les entiers naturels a et b définies par :

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - n - 1$$

Factoriser a et b, en déduire que a et b sont divisibles par $(n - 1)$.

4) On pose $d_2 = n(n + 3) \wedge (2n + 1)$ et $\delta = a \wedge b$

a) Montrer que $d_1 = d_2$ (on pourra montrer que d_1 divise d_2 et d_2 divise d_1).

b) En déduire δ en fonction de d_1 et n.

c) Application : Déterminer δ pour $n = 2002$.

Déterminer δ pour $n = 2010$.

Exercice 9

1) On considère l'équation (1) d'inconnue (n , m) élément de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $11n - 24m = 1$

a) Justifier que cette équation admet au moins une solution.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1) .En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2) Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

3) Soit (n , m) un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1).

a) Montrer que : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$

b) Montrer pour tout réel x non nul et tout entier naturel k on a :

$x^k - 1 = (x - 1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1)$

c) Montrer que : $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.

En déduire que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

4) Déterminer des questions précédentes le $PGCD$ de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

5) **a)** Montrer que $10^{12} \equiv 1 \ (mod\ 13)$ et en déduire que $10^{24} - 1$ est divisible par 13.

b) Montrer que $10^6 \equiv 1 \ (mod\ 7)$ et en déduire que $10^{24} - 1$ est divisible par 7.

c) Montrer que $10^{24} - 1$ est divisible par 3.

6) En déduire de ce qui précède que $10^{24} - 1$ est divisible par 273.

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{\imath} , \vec{\jmath}\,)$. On donne le point $A(4 , 6)$, B et C sont les points respectivement de l'axe $(O,\vec{\imath})$ et de l'axe $(O,\vec{\jmath})$ tel que le triangle ABC est rectangle en A on note x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1) Montrer que le couple (x,y) est solution de l'équation (E): $2x+3y=26$.

2) On se propose de déterminer les points B et C dont les coordonnées sont entières.

a) Vérifier que les coordonnées de A vérifient l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E).

3) **a)** Déterminer les cordonnées de B et C, telles que : $5\leq x\leq 15$ et $-5\leq y\leq 5$.

b) Faire une figure, on affectera aux points B et C les valeurs de k trouvées.

Exercice 11

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $2x+5y=6$

1) **a)** Vérifier que $(3,0)$ est solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E).

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de $x\wedge y$?

b) Déterminer les couples (x,y), solutions de (E), tel que $x\wedge y=3$.

Exercice 12

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=1+31+31^2+\cdots+31^{n-1}$

1) **a)** Montrer que : $S_{2013}-31\times S_{2012}=1$.

b) En déduire que 31 et S_{2013} sont premiers entre eux.

2) Montrer que Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $30\times S_n=31^n-1$.

3) **a)** Montrer que $31^{2013}\equiv 1\ (mod\ S_{2013})$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence : $31x\equiv 1(mod\ S_{2013})$

4) Par la suite on admet que 2011 est premier.

a) Montrer que si n est premier et $n\geq 7$ alors n divise S_n-1.

b) Déterminer le reste modulo 2011 du nombre S_{2013}.

Exercice 13

Soit la suite U d'entiers naturels définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=14$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=5U_n-6$.

1) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4

2) **a)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $U_{n+2}\equiv U_n\ (mod\ 4)$.

b) En déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}$ on a : $U_{2k}\equiv 2\ (mod\ 4)$ et $U_{2k+1}\equiv 0\ (mod\ 4)$.

3) **a)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $2U_n=5^{n+2}+3$

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $2U_n\equiv 28\ (mod\ 100)$.

4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de U_n suivant les valeurs de n.

5) Montrer que le $PGCD$ de deux termes consécutifs de U est constant, préciser sa valeur.