GEOMETRIE DANS L'ESPACE 4ème Sc Expérimentales

Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

Exercice 1

On considère les points : $A(1, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$ et $C(0, 2, -1)$.

1) a) Montrer que A, B, et C ne sont pas alignés.

b) Calculer l'aire du triangle ABC

2) a) Soit le point $D(-1, -3, -1)$. Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Montrer que les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

b) Calculer la distance du point D à la droite (AB)

c) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$

Exercice 2

On considère les points : $A(2, 0, 1)$, $B(0, 2, 1)$ et $C(1, 2, 0)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

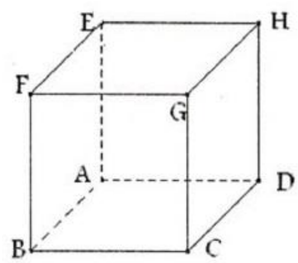
b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés

2) Calculer l'aire du triangle ABC

3) Soit $M(x, y, z)$ montrer que si M, A, B et C sont coplanaires si et seulement si $x + y + z - 3 = 0$

Exercice 3

La figure ci-contre est celle d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1



1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est égale à :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{2}$

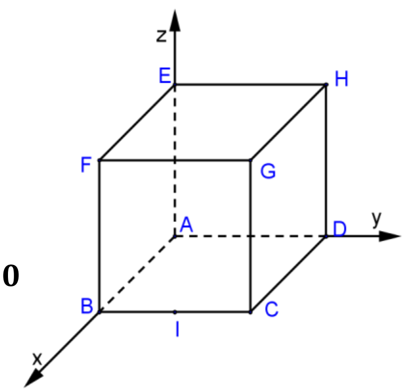
2) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égale à :

a) $\overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{EA}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AE}$

Exercice 4

La figure ci- contre est celle d'un cube ABCDEFGH d'arête 1

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$



1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}$ est égale à :

a) 0 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$

2) Une équation du plan (ECG) est :

a) $x + y - 2 = 0$ b) $x + y - 1 = 0$ c) $x - y = 0$

3) On désigne par I le milieu du segment $[EG]$.

Soit S la sphère de centre I et passant par F. Alors on a :

a) Le plan (BEG) est tangent à la sphère S.

b) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle de diamètre $[EG]$.

c) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.

Exercice 5

On considère les points : $A(3\,,2\,,4)$, $(0\,,3\,,5)$, $C(3\,,1\,,0)$ et $D(6\,,0\,,-1)$

1) a) Montrer que les points A, B et D ne sont pas alignés

   b) Calculer l'aire du triangle ABD

2) Montrer que ABCD est un parallélogramme et calculer son aire

3) Soit $M(x\,,y\,,z)$ montrer que si $M \in (AB)$ si et seulement si $\begin{cases} x+3y+3=0 \\ x+3z-15=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$

Exercice 6

On considère les points $A(1\,,0\,,;0)$, $B(1\,,-1\,,1)$ et $C(-2\,,0\,,1)$

1) On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

   a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{u}$.

   b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

   c) Donner une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$.

   d) Calculer l'aire du triangle ABC.

2) Soit le point $G(x\,,y\,,z)$ tel que $2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

   a) Déterminer les coordonnées du point G

   b) On pose : $\Delta = \left\{M(x\,,y\,,z) \text{ tel que : } 2\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MC} = \vec{0}\right\}$

Montrer que Δ est une droite que l'on caractérisera.

3) Soit le plan Q : $y+z+2=0$

   a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires.

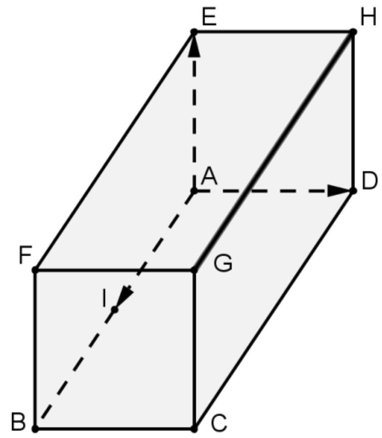
   b) Soit $\Delta' = P \cap Q$. Donner une représentation paramétrique de Δ'

Exercice 7

Dans la figure ci-contre $ABCDEFGH$ est un parallélépipède tel que $AB = 2$, $AD = AE = 1$.

On désigne par I le milieu de $[AB]$

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ est égal à

   a) $2\overrightarrow{AD}$ b) $-2\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{DA}$

2) L'intersection des plans d'équations $y = 1$ et $z = 1$ est la droite

   a) (FG) b) (DG) c) (GH)

3) Une équation du plan (AHG) est

   a) $y - z = 0$ b) $y + z = 0$ c) $y + z - 2 = 0$

Exercice 8

On considère les plans P : $5x - y + 2z - 5 = 0$ et Q : $-5x + y - 2z + 4 = 0$

1) Montrer que P et Q sont parallèles

2) On considère les points $(1\,,2\,,;1)$, $B(1\,,0\,,;0)$, $C(0\,,-1\,,2)$ et $D(0\,,1\,,3)$

a) Vérifier que A, B et C appartiennent à P

b) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme et en déduire que $D \in P$

c) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et en déduire que $ABCD$ est un rectangle.

3) Soient A' , B' , C' et D' les projetés orthogonaux respectivement de A, B, C et D sur Q

a) Déterminer les coordonnées de A' , B' , C' et D'

b) Montrer que $ABCDA'B'C'D'$ est un parallélépipédique

c) Calculer le volume de $ABCDA'B'C'D'$

Exercice 9

On considère les droites : $D : \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+2\alpha \\ z = 1-\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ et $D' : \begin{cases} x = 4+3\beta \\ y = 3+\beta \\ z = 3+2\beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

1) Montrer que les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

2) a) Le point $A(4\,,-7\,,5)$ appartient-il à la droite D ?

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P passant par le point A et contenant la droite D est : $y+2z-3=0$

3) a) Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{\imath}+\vec{\jmath}+m\vec{k}$ soit un vecteur du plan P.

b) Déterminer la position relative de la droite $\Delta = D(A\,,\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k})$ avec le plan P.

4) Déterminer $D' \cap P$.

5) Soit les plans $P_1 : x-4y+7=0$ et $P_2 : x-2z+5=0$.

a) Vérifier que P_1 et P_2 sont sécants.

b) Trouver une représentation paramétrique de leur droite D_1 d'intersection.

Exercice 10

On considère les points $A(1\,,-2\,,-1)$, $B(3\,,-3\,,-2)$ et $C(0\,,-3\,,1)$

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)

b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB)

2) a) Montrer que les points A, B et C forment un plan P

b) Donner une représentation paramétrique de P

c) Donner une équation cartésienne de P

3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par $D(1\,,1\,,1)$

4) Soit le plan $P' : -x+2y-2z+4=0$. Montrer que P et P' sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection

Exercice 11

On considère les points $A(1\,,2\,,2)$, $B(3\,,2\,,1)$ et $C(1\,,3\,,3)$

1) a) Montrer que les points A, B, et C ne sont pas alignés

b) Donner un vecteur normal au plan P contenant les points A, B et C

c) En déduire une équation cartésienne du plan P

d) Déterminer une représentation paramétriques de la droite D passant par le point A et perpendiculaire à P

2) On considère les plans $P_1 : x-2y+2z-1=0$ et $P_2 : x-3y+2z+2=0$

a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants

b) Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 ; Montrer que le point C appartient à la droite Δ et que le vecteur $\vec{U}=2\vec{i}-\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ

3) Calculer la distance du point A à la droite Δ

4) On désigne par Q le plan perpendiculaire à la droite Δ et passant par le point A

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q

b) Montrer que le point $H(\frac{7}{5},3,\frac{14}{5})$ est le projeté orthogonal du point A sur Δ

c) Retrouver la distance du point A à la droite Δ

Exercice 12

On considère les plans P : $x-z=0$ et Q : $x-y+z-1=0$

1) a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires

b) On désigne par $D=P\cap Q$ donner une représentation paramétrique de D

2) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\Delta : \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2 \\ z=1-\alpha \end{cases}$; $(\alpha \in IR)$

a) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan P et déterminer les coordonnées du point A intersection de Δ et P

b) Soit H le projeté orthogonal de A sur Q. Montrer que la droite (AH) est incluse dans P

3) Soit M un point quelconque de Δ et soit M' le projeté orthogonal de M sur le plan Q

a) Montrer que les plans (AMH) et (MM'H) sont parallèles

b) En déduire que les points A, H, M et M' sont coplanaires

4) a) Montrer que si $M\neq A$, le quadrilatère AMM'H est un rectangle

b) Déterminer les coordonnées des points M pour que AMM'H soit un carré

c) Déterminer les coordonnées des points M pour que $d(M,D)=5$

Exercice 13

On considère les plans P : $2x-y+2z-5=0$ et Q : $2x+2y-z-4=0$ Soit $A(1,2,-1)$

1) Montrer que les plans Pet Q sont perpendiculaires

2) a) Vérifier que $A\notin P$ et que $A\notin Q$

b) Calculer la distance du point A à chacun des plans P et Q

c) en déduire la distance du point A à la droite D intersection des plans P et Q

3) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D

b) Déterminer par ses coordonnées, le point M de la droite D pour lequel la distance AM est minimale

Exercice 14

On considère les points $A(1,2,-1)$ et $B(2,1,1)$

1) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB)

2) Soit P_m le plan d'équation : $x+y+m-3=0$ où m est un paramètre réel

a) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m

b) Pour quelle valeur de m la droite (AB) est incluse dans le plan P_m

c) Montrer que le plan P_m est perpendiculaire au plan Q

3) Soit B' le projeté orthogonal de B sur P_m et A' le projeté orthogonal de A sur P_m

Déterminer les valeurs de m pour que ABB'A' soit un carré

Exercice 15

Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de ξ tel que $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon

2) Soit le plan $P: x+z-1=0$. Montrer que Pet S sont sécants suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon

3) Soit le point $A(2,0,-1)$

a) Vérifier que $A \in S$

b) Donner une équation cartésienne du plan Q tangent à S en A

c) Montrer que P et Q sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection

Exercice 16

Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de ξ tel que $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ et le point $B(0,-1,1)$

1) Montrer que S est une sphère de centre $A(1,0,0)$ et de rayon 2

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à (AB) en B

3) Montrer que l'intersection de S et P est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon

4) Soit m un réel. Soit le plan $P_m : mx+my-z+2=0$

a) Etudier suivant les valeurs de m la position relative de S et P_m

b) Montrer que le plan P_0 est tangent à la sphère S et déterminer les coordonnées du point de contacte C

Exercice 17

On donne le point $I(-1,3,0)$ et les plans $P_1: 2x-y+z+5=0$ et $P_2: x-2z+1=0$

1) a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires

b) Montrer que la droite $D = P_1 \cap P_2$ passe I et dont un vecteur directeur est $\vec{U} = 2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$

c) Montrer que le plan P, perpendiculaire à D et passant par le point $A(2,0,-1)$, a pour équation cartésienne : $2x+5y+z-3=0$

2) a) Déterminer par ces coordonnées le point H commun à D et P

b) Calculer de deux manières la distance $d(A;D)$

3) Soit $S=\{M(x,y,z) \text{ tel que } x^2+y^2+z^2+2x-6y-6=0\}$

a) Montrer que S est une sphère de centre le point I et dont on déterminera le rayon R

b) Montrer que $S\cap P$ **est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon**

c) Déterminer par leurs coordonnées les points communs à S et D

4) Déterminer par leurs équations cartésiennes les plans parallèles à P et tangents à S

Exercice 18

On considère les points $AA(-1,1,3)$, $B(2,1,0)$ et $C(2,-1,2)$

1) a) Montrer que les ponts A, B et C ne sont pas alignés.

b) On note P le plan (ABC).

Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x+y+z-3=0$

2) a) Soit Q le plan médiateur du segment $[AB]$.

Montrer qu'une équation cartésienne de Q est : $x-z+1=0$

b) On note D la droite d'intersection de P et Q. Trouver une équation cartésienne de D

3) Soit $S=\{M(x,y,z)\in E \text{ tel que } MB^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}=0\}$

a) Vérifier que $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

b) En déduire que S est une sphère de centre $I(2,0,1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

c) Montrer que le plan Q est tangent à S en un point H dont on déterminera les coordonnées

4) Soit m un réel, on donne :

$$S_m=\{M(x,y,z)\in E \text{ tel que } x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2(m+3)z+5m-10=0\}$$

a) Montrer que S_m est une sphère de centre $\Omega_m(m,m,m+3)$ et dont on déterminera le rayon R_m

b) Que décrit le point Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$

c) Discuter selon m la position relative de S_m et P.

Exercice 19

On donne les points A(-3,0,0) ,B(-1,-1,0) ,C(-1,0,1) .

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A,B et C déterminent un plan (P).

c) Donner une équation cartésienne du plan (P).

d) Vérifier que l'aire du triangle ABC est égale à 32.

2) On désigne par Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\Delta:\begin{cases} x=-4+2t \\ y=-2+4t \\ z=2-4t \end{cases} \quad t\in IR$

a) Montrer que Δ est perpendiculaire au plan (P) en A.

b) Montrer que le point E(-2,2,-2) appartient à Δ.

c) Calculer le volume du tétraèdre EABC.

3) Soit (S) ={M (x,y,z) tels que $x^2+y^2+z^2+4x-4y+4z-2=0$}.

a) Montrer que (S) est une sphère de centre E dont on précisera le rayon R.

b) Vérifier que B et C sont deux points de (S) .

c) Justifier que le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (Γ) dont on donnera le centre et le rayon r.

4) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) en B.

Exercice 20

On désigne par S l'ensemble des points M (x,y,z) tels que $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$

1) Montrer que S est une sphère de centre $\Omega(0,2,0)$ et de rayon 3

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x-2y+z-2=0$

Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S\cap P$

3) Soit le plan P_m dont une équation cartésienne est : $2mx+(1-2m)y+mz+1-2m=0$

a) Soit Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1 \\ z=-2\lambda \end{cases}$ **;** $\lambda\in IR$

Vérifier que la droite Δ est incluse dans P_m

b) Calculer la distance $d(\Omega,P_m)$ du point Ω au plan P_m

d) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S. Préciser les coordonnées du point de contacte

Exercice 21

On considère les points $A(1,1,-2)$, $B(1,2,-2)$ et $C(0,1,1)$

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan P

2) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+\vec{k}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+z-1=0$

3) Soit Q le plan perpendiculaire à (AC) passant par A.

a) Donner une équation cartésienne de Q

b) Montrer que P et Q sont perpendiculaires suivant (AB)

4) Soit S_m l'ensemble des points M (x,y,z) tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-2my+4z+4=0 \quad (m\in IR)$

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b) Montrer que l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans IR , est la droite (AB)