

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{x+3}{x-2}$ 2) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$ 3) $f(x) = \frac{-3}{|x|-2}$ 4) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$

5) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{x+2}}$ 6) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{4}{|x|}}$ 7) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|-2}}{x+1}$

8) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x+2}$ 9) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2+5x-3}$ 10) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

Exercice 2

Etudier la parité des fonctions suivantes : $f(x) = 3x^4 + x^2$ $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f(x) = -2x^2 + 3|x| - 1$ $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+|x|}$ $f(x) = 3x^2 - 2x$

Exercice 3

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant

- 1) La fonction $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5, 6\}$ est impaire.
- 2) La fonction $f(x) = -2x^2$ définie sur $[-8, 0[\cup]0, 8]$ est paire.
- 3) La fonction $f(x) = \frac{-x}{1-x}$ est croissante sur $]1, +\infty[$

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes sont bornées, majorées ou minorées sur l'intervalle I indiqué :

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $I = [2, 3]$ | b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ $I =]-\infty, 4]$ |
| c) $f(x) = \frac{2x - 1}{3x - 2}$ $I = [1, 3]$ | d) $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 1}$ $I = [0, 2]$ |

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de .
- 2) Montrer que la fonction f est impaire .
- 3) Etudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R}^*
- 4) Montrer que f est majorée sur $]0, +\infty[$ par 1 .
- 5) Montrer que f est minorée sur $]-\infty, 0[$ par -1 .

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = |2 - x| + 2|x + 2| - x$.

- 1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles .
- 2) Tracer C_f la courbe représentative de f .

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x^2 + bx + 4$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Déterminer b pour que C_f passe par le point $A(1, 5)$.
- 2) Dans la suite on suppose que $(x) = x^2 + 4$.
 - a) Etudier la parité de f .
 - b) Etudier les variations de f .
 - c) Minorer f sur \mathbb{R} .
- 3) Tracer C_f .
- 4) a) Tracer la droite $\Delta : y = x + 6$ dans le même repère.
b) Déterminer l'intersection de C_f et Δ graphiquement puis par le calcul.
- 5) Soit g la fonction définie sur $g(x) = x^2 + 1$ et soit C_g sa courbe représentative.
 - a) Exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$
 - b) En déduire la construction de C_g puis tracer C_g .

Exercice 8

Soit g la fonction définie sur $[0, 3[$ par $g(x) = \frac{1}{2}xE(x) - \frac{1}{2}E(x) + 1$.

- 1) Trouver l'expression simplifiée de $g(x)$ sur chacun des intervalles $[0, 1[$, $[1, 2[$ et $[2, 3[$
- 2) Construire la représentation graphique de g

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) - 2f(-x) = x^6 - 2x^2$

- 1) Montrer que la fonction f est paire.
- 2) Déterminer $f(x)$.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 12x^2 + 60x + 71$

- 1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3(2x + 5)^2 - 4$
b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \geq -4$
- 2) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a : $f(a) - f(b) = 12(a + b + 5)(a - b)$
- 3) En déduire la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty, -\frac{5}{2}]$ et $[-\frac{5}{2}, +\infty[$

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = |x| + |x - 2| + |4 - x|$

- 1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles.
- 2) Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 12

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f
- 2) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Exercice 13

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f

2) Montrer que f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}$

1) a) Vérifier que pour tout réel x on a : $2x^2 + 8x + 9 = 2(x + 2)^2 + 1$

b) En déduire le domaine de définition D_f de f .

2) a) Montrer que pour tout réel $x \in D_f$ on a : $f(x) + 1 \geq 0$.

b) En déduire que -1 est le minimum de f sur D_f . Pour quelle valeur est-il atteint.

3) Montrer que $\frac{1}{2}$ est un majorant de f sur D_f .

Exercice 15

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x$

1) Montrer que f est impaire

2) a) Soient a et b deux réels distincts, montrer que :

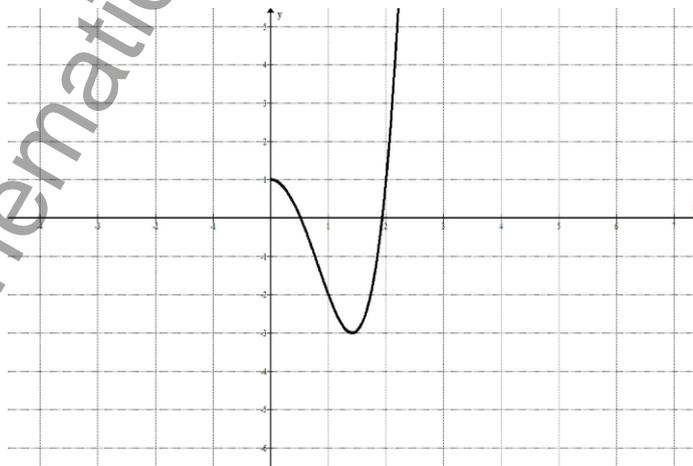
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = b^2 + ab + a^2 - 3$$

b) En déduire que f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$

et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[-1, 1]$

Exercice 16

On a tracé ci-dessous une branche d'une fonction f paire et définie sur \mathbb{R} . Achever le tracé.



Exercice 16

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f .

1) Pour chacune des questions suivantes une et une seule réponse est exacte. Cocher la bonne réponse

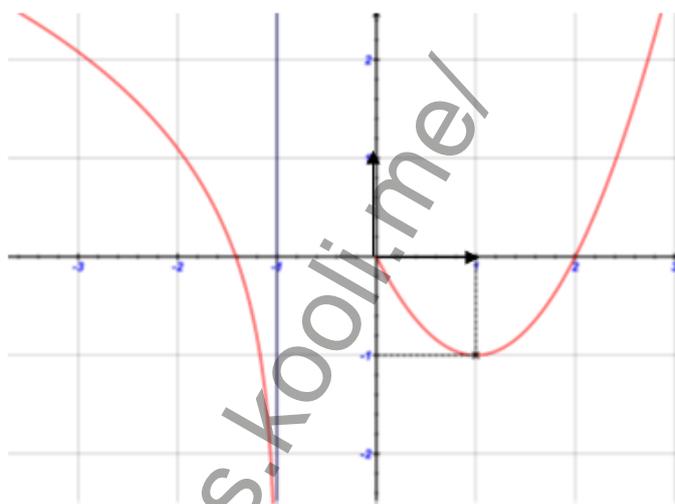
a) La fonction f est définie sur :

1) \mathbb{R}

2) $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

3) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

- b)** L'équation $f(x) = 0$ admet :
- 1) une solution 2) deux solutions 3) trois solutions
- c)** L'image de l'intervalle $]-\infty, -1[$ par la fonction f est :
- 1) \mathbb{R} 2) $]-\infty, 0]$ 3) $]-\infty, -1[$
- d)** Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ la fonction f est :
- 1) bornée 2) minorée 3) ni majorée ni minorée
- 2) a)** Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- b)** Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$
- 3)** Soit la fonction g définie par $g(x) = f(|x|)$
- a)** Etudier la parité de g .
- b)** Tracer C_g la courbe représentative de la fonction g .

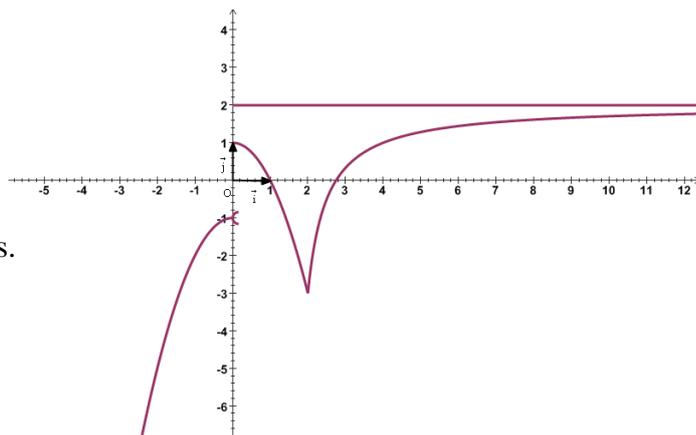


Exercice 17

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f .

Répondre par « Vrai » ou « Faux »

- a)** La fonction f est définie sur \mathbb{R}^*
- b)** La fonction f admet un maximum absolu égale à 2
- c)** L'équation $f(x) = -1$ admet dans \mathbb{R} trois solutions.
- d)** La restriction de la fonction f à l'intervalle $[0, +\infty[$ est bornée



Exercice 18

Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + 6x + 4$ et $g(x) = x^2$

On désigne par C_g la courbe de la fonction g et par C_f celle de la fonction f .

- 1)** Montrer qu'il existe trois réels α et β tel que $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$.
- 2)** En déduire alors que $C_f = t_{\vec{u}}(C_g)$ où \vec{u} est un vecteur à préciser.
- 3)** Etudier les variations de g et tracer dans le même repère C_g et C_f .
- 4)** Donner un minorant de f en justifiant la réponse.