Généralités sur les fonctions 3ème Sc Techniques

Exercice 1

Montrer que les fonctions suivantes sont bornées, majorées ou minorées sur l'intervalle I indiqué :

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad I = [2\,,3]$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+2} \quad I =]-\infty\,,4]$

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-2} \quad I = [1\,,3]$ d) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1} \quad I = [0\,,2]$

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+3}{x-2}$ **2**) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2}$ **3**) $f(x) = \dfrac{-3}{|x|-2}$ **4**) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4}$

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{x+2}}$ **6**) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{4}{|x|}}$ **7**) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|-2}}{x+1}$

8) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x+2}$ **9**) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2+5x-3}$ **17**) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

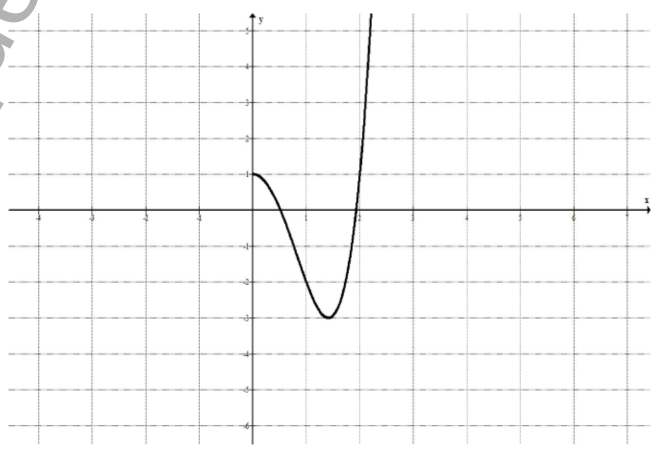
Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) - 2f(-x) = x^6 - 2x^2$

1) Montrer que la fonction f est paire.
2) Déterminer $f(x)$.

Exercice 4

On a tracé ci-dessous une branche d'une fonction f paire et définie sur $\mathbb{R}$. Achever le tracé.



Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3(2x+5)^2 - 4$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \geq -4$
2) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a : $f(a) - f(b) = 12(a+b+5)(a-b)$
3) En déduire la monotonie de f sur les intervalles $\left]-\infty\,,-\frac{5}{2}\right]$ et $\left[-\frac{5}{2}\,,+\infty\right[$

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x| + |x-2| + |4-x|$

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles.

2) Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Exercice 7

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f

2) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Exercice 8

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f

2) Montrer que f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$

Exercice 9

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x$

1) Montrer que f est impaire

2) a) Soient a et b deux réels distincts, montrer que : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = b^2 + ab + a^2 - 3$

b) En déduire que f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1]$ et $[1, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[-1, 1]$

Exercice 10

Etudier la parité des fonctions suivantes : $f(x) = 3x^4 + x^2$ $\quad f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

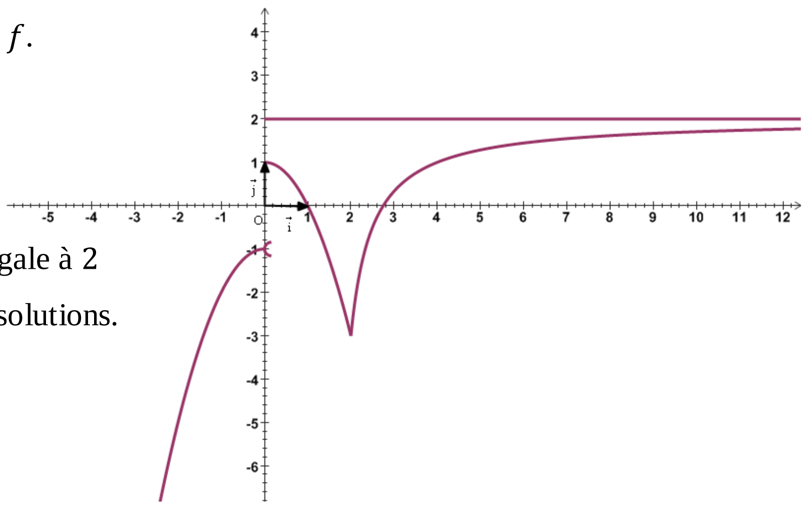
$f(x) = -2x^2 + 3|x| - 1$ $\quad f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + |x|}$ $\quad f(x) = 3x^2 - 2x$

Exercice 11

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f.

Répondre par « Vrai » ou « Faux »

dans chacune des questions suivantes :



a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$

b) La fonction f admet un maximum absolu égale à 2

c) L'équation $f(x) = -1$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions.

d) La restriction de la fonction f à l'intervalle $[0, +\infty[$ f est bornée

Exercice 12

Déterminer la plus petite période strictement positive des fonctions suivantes

$f(x) = \sin(3x - 2)$ $\quad g(x) = \cos(-2x - 1)$ $\quad h(x) = -sin\,(-4x + 3)$

$p(x) = |\sin(-2x + 1)|$

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x - 2| + 2|x|$

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles

2) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

3) résoudre l'inéquation $f(x) \leq 3 - x$

Exercice 14

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 6x + 4$ et $g(x) = x^2$

On désigne par C_g la courbe de la fonction g et par C_f celle de la fonction f.

1) Montrer qu'il existe trois réels a, α et β tel que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

2) En déduire alors que $C_f = t_{\vec{u}}(C_g)$ où $\vec{u}$ est un vecteur à préciser.

3) Etudier les variations de g et tracer dans le même repère C_g et C_f.

4) Donner un minorant de f en justifiant la réponse.

Exercice 15

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.

1) Pour chacune des questions suivantes une et une seule réponse est exacte. Cocher la bonne réponse

a) La fonction f est définie sur :

$\mathbb{R}$ ☐ $\quad]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$ ☐ $\quad \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$ ☐

b) L'équation $f(x) = 0$ admet :

une solution ☐ deux solutions ☐ trois solutions ☐

c) L'image de l'intervalle $]-\infty, -1[$ par la fonction f est :

$\mathbb{R}$ ☐ $\quad]-\infty, 0]$ ☐ $\quad]-\infty, -1[$ ☐

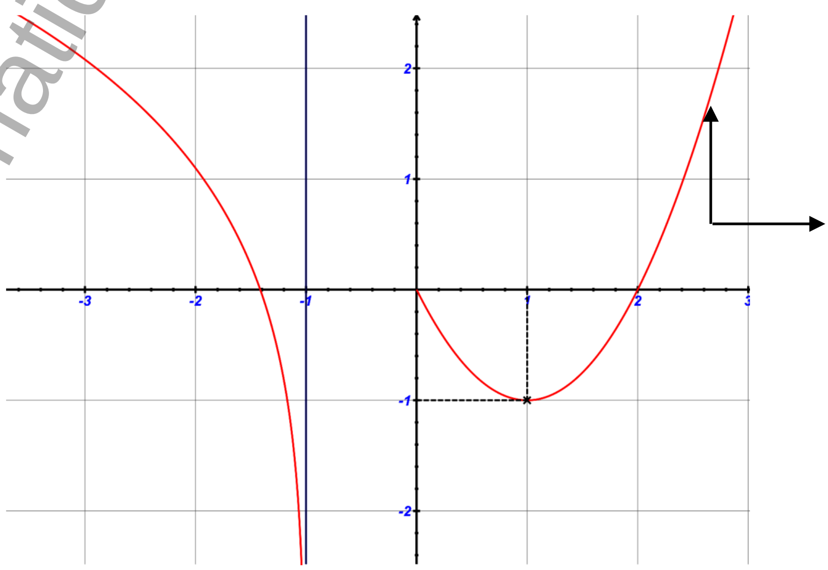
d) Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ la fonction f est :

bornée ☐ minorée ☐ ni majorée ni minorée ☐

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$

3) Soit la fonction g définie par $g(x) = f(|x|)$



a) Etudier la parité de g.

b) Tracer C_g la courbe représentative de la fonction g.

Exercice 16

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

   a) Déterminer D_f le domaine de définition de f

   b) Etudier la parité de f

2) a) Montrer f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*{}_+$

   b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

   c) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^*{}_+$

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$

   a) Etudier la parité de g

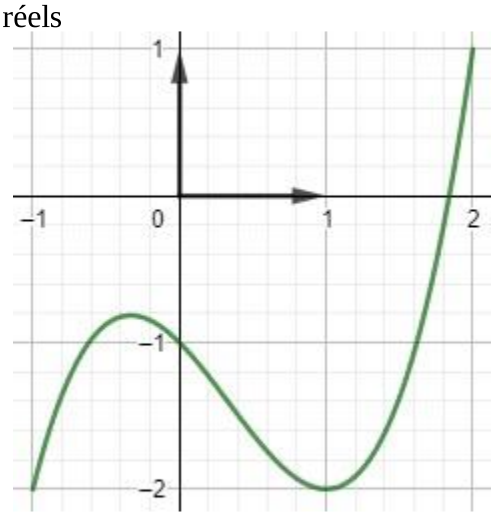
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $g(x) = f^2(x) + 2$

   c) Déduire que la fonction g est strictement décroissante sur $]0\,,1]$ et strictement croissante sur $[1\,,+\infty[$

   d) Montrer que 2 est un minimum de g

Exercice 17

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1\,,2]$ par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ où , b et c sont des réels



1) Par lecture graphique

   a) Déterminer $f([-1\,,2])$

   b) Déterminer le nombre de solutions des équations

$f(x) = 0$ et $f(x) = -1$

   b) Déterminer les réels a , b et c

Exercice 18

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 - \frac{2x^2}{1+x^2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition f

   b) Montrer que f est une fonction paire et interpréter le résultat graphiquement

2) a) Montrer que pour tout réels a et b on a : $f(a) - f(b) = \frac{2(b^2-a^2)}{(a^2+1)(b^2+1)}$

   b) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,,+\infty[$ en déduire les variations de f sur $]-\infty\,,0]$

   c) Justifier que f admet un maximum en 0

2) a) Montrer que pour tout réel on a : $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

   b) Montrer que pour tout réel x on a : $-1 \leq f(x) \leq 1$

3) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{1 - f^2(x)}$

Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$