Fonctions trigonométriques 3ème Mathématiques

Kooli Mohamed Hechmi

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{6x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+\sin x}{3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{1-\cos x}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$ 8) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$ 10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{\sin^2 x}}{x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{x}$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f(\pi-x)=-f(x)$

 b) Interpréter le résultat trouvé.

2) a) Calculer pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$.

 b) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi\,,\pi]$.

3) a) Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

 b) Tracer T et C_f.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^2 x\cos(2x)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est périodique de période π.

 b) Etudier la parité de f.

 c) En déduire que l'on peut étudier f sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x)=(2\cos 2x-1)\sin 2x$

 b) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

3) Tracer la partie de C_f pour tout $x\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 4

Le graphique C_f représenté ci-dessous sur l'intervalle $[0\,,\pi]$ est celui d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=a\cos 2x+b\cos x$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

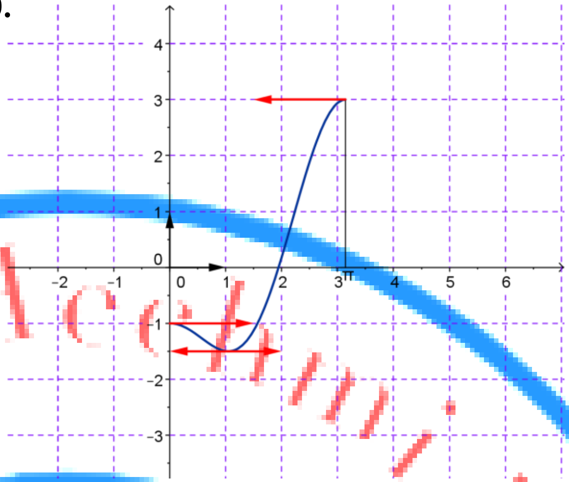
1) Par lecture graphique, montrer que $f(x)=\cos 2x-2\cos x$.

2) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{2\pi}{3}$ Tracer T.

3) Compléter la construction de C_f sur $[-2\pi\,,2\pi]$; expliquer.

4) Soit g la fonction définie sur $]-\pi\,,\pi[$ par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x)+1}{\sin x} & si\ \ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

5) Montrer que g est continue et dérivable en 0.



Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = x\ \sin x + \cos x - 1$

1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire le signe $g(x)$ de pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} f(x) = 2\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right) & si\ \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0, préciser $f'(0)$ et écrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

c) Etudier la parité de f.

3) a) Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ on a : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer C_f (unité graphique 3 cm)

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos(2x)}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Etudier la parité de f.

2) a) Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}\,,0\right)$ est un centre de symétrie de C_f.

b) Montrer que f est périodique de période 2π.

c) En déduire que les point $I_k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,,0\right)$ sont des centres de symétrie de C_f.

3) a) Justifier que l'on peut étudier f sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ et que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$;

$f'(x)=\frac{(1+2cos^2x)\,\sin x}{cos^2(2x)}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ a\sin(2x)+b(1-2\cos(2x))$ où a et b deux réels. La fonction f admet un extremum au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$ et le point $A\left(\frac{2\pi}{3},-3\right)\in C_f$ courbe représentative de f.

1) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$.
2) Montrer que f est périodique de période π.
3) a) Calculer $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.
4) Tracer la partie de C_f pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$.
5) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2\cos\left(2|x|-\frac{\pi}{3}\right)-1$
   a) Montrer que la fonction g est paire.
   b) Explique comment déduire le traçage de C_g courbe représentative de g à partir de C_f et tracer C_g.

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\,cos^2x-\sqrt{3}sin^2x-1$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$; $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.
2) a) Montrer que la droite Δ: $x=\frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de C_f.
   b) En déduire que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.
3) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Construire la courbe C_1 de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$. (Préciser les points d'intersection de C_1 avec l'axe des abscisses).
4) Soit la fonction g définie sur $\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ par $g(x)=2\cos\left(2|x|+\frac{\pi}{3}\right)$ et soit C_g sa courbe représentative.
   a) Utiliser C_1 pour tracer C_g.
   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x)\geq 0$.

Exercice 9

Soit $f(x)=\sqrt{4x^2-2x-2}-1$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f

b) Montrer que $\Delta : x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C_f et déduire que l'on peut réduire le domaine d'étude de f

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 est interpréter le résultat graphiquement

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que $D : y = 2x - \frac{5}{4}$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

d) Construire C_f

3) Soit la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = |f(x)| & si\ \ x \in D_f \\ g(x) = 1 - \sqrt{-4x^2 + 2x + 2} & \text{si non} \end{cases}$ et soit C_g sa courbe

a) Montrer que $\Delta' : x = \frac{1}{4}$ est un axe de symétrie de C_g et déduire que l'on peut réduire le domaine d'étude de g

b) Etudier la dérivabilité de g à gauche en 1 est interpréter le résultat graphiquement

c) Dresser le tableau de variation de g sur $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

d) Construire C_g

4) Soit la fonction u définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $u(x) = 2\sin x - 2x\cos x + 1$

a) Dresser le tableau de variation de u

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

5) Soit la fonction h définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = \frac{x\sin x}{\left(\left(f(\sin x)-1\right)\right)^2}$ et soit C_h sa courbe

a) Déterminer le domaine de définition D_h de h

b) Montrer que $\forall x \in D_h$ on a $h(x) = \frac{x}{4\sin x + 2}$

c) Dresser le tableau de variation de h

d) Construire C_h