

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{6x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + \sin x}{3x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{1 - \cos x}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$ 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$ 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ 10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$ 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sqrt{\sin^2 x}}{x}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{x}$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(\pi - x) = -f(x)$
 b) Interpréter le résultat trouvé.
- 2) a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.
 b) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi, \pi]$.
- 3) a) Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$
 b) Tracer T et C_f .

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin^2 x \cos(2x)$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que f est périodique de période π .
 b) Etudier la parité de f .
 c) En déduire que l'on peut étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x) = (2 \cos 2x - 1) \sin 2x$
 b) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 3) Tracer la partie de C_f pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4

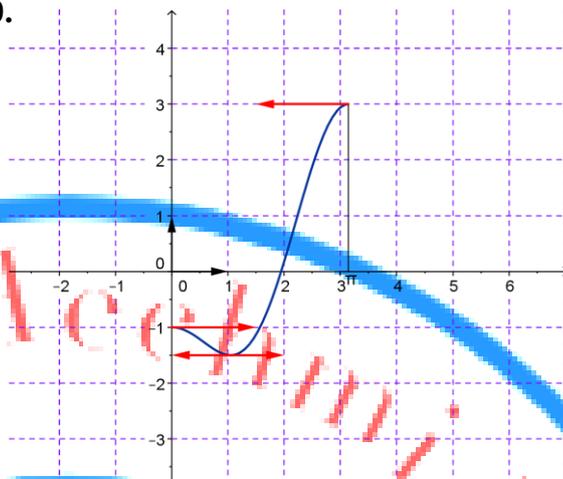
Le graphique C_f représenté ci-dessous sur l'intervalle $[0, \pi]$ est celui d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$f(x) = a \cos 2x + b \cos x$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- 1) Par lecture graphique, montrer que $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$.
- 2) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{2\pi}{3}$ Tracer T .
- 3) Compléter la construction de C_f sur $[-2\pi, 2\pi]$; expliquer.

4) Soit g la fonction définie sur $]-\pi, \pi[$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)+1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

5) Montrer que g est continue et dérivable en 0.



Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = x \sin x + \cos x - 1$

1) a) Dresser le tableau de variation de g .

b) En déduire le signe $g(x)$ de pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2) Soit la fonction f définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $\begin{cases} f(x) = 2 \left(\frac{1-\cos x}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe

représentative.

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0, préciser $f'(0)$ et écrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

c) Etudier la parité de f .

3) a) Montrer que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ on a : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Tracer C_f (unité graphique 3 cm)

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\cos x}{\cos(2x)}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

b) Etudier la parité de f .

2) a) Montrer que le point $I \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ est un centre de symétrie de C_f .

b) Montrer que f est périodique de période 2π .

c) En déduire que les point $I_k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 \right)$ sont des centres de symétrie de C_f .

3) a) Justifier que l'on peut étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ et que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$; $f'(x) = \frac{(1+2\cos^2 x) \sin x}{\cos^2(2x)}$

c) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a \sin(2x) + b(1 - \cos(2x))$ où a et b deux réels. La fonction f admet un extremum au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$ et le point $A\left(\frac{2\pi}{3}, -3\right) \in C_f$ courbe représentative de f .

1) a) Montrer que $a = \sqrt{3}$ et $b = -1$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

2) Montrer que f est périodique de période π .

3) a) Calculer $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

4) Tracer la partie de C_f pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

5) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2 \cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

a) Montrer que la fonction g est paire.

b) Explique comment déduire le traçage de C_g courbe représentative de g à partir de C_f et tracer C_g .

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x - 1$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} ; f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2) a) Montrer que la droite $\Delta: x = \frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de C_f .

b) En déduire que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Construire la courbe C_1 de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$. (Préciser les points d'intersection de C_1 avec l'axe des abscisses).

4) Soit la fonction g définie sur $\left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ par $g(x) = 2 \cos\left(2|x| + \frac{\pi}{3}\right)$ et soit C_g sa courbe représentative.

a) Utiliser C_1 pour tracer C_g .

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \geq 0$.