Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

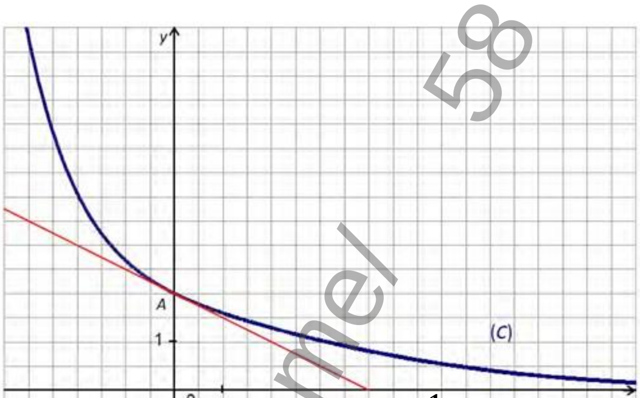
Exercice 1

Pour chaque question indiquer la réponse exacte.

1) Soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ la bijection de $]2\,,+\infty[$ sur $]1\,,+\infty[$

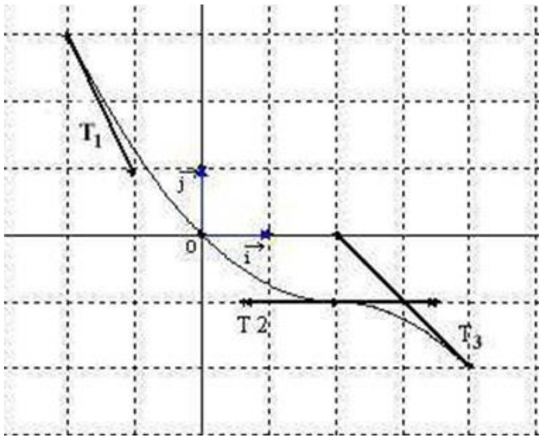
a) $(f^{-1})(y)=\frac{-2y^2}{1-y^2}$ b) $(f^{-1})(y)=\frac{2y^2}{1-y^2}$ c) $(f^{-1})(y)=\frac{-2y^2}{y^2-1}$

2) La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



a) $(f^{-1})'(2)=-2$ b) $(f^{-1})'(2)=-\frac{1}{2}$ c) $(f^{-1})'(2)=2$

Exercice 2



Le graphique ci-contre est celui d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $[-2\,,4]$.

T_1 est la demi-tangente au point d'abscisse 1.

T_2 est la tangente au point de coordonnées $(2\,,-1)$.

T_3 est la tangente au point de coordonnées $(4\,,-2)$.

1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant

a) $f'_d(-2)=-2\ ;\ f'_g(4)=2\ ;\ f'(2)=0$

b) La fonction f réalise une bijection de $[-2\,,4]$ sur l'intervalle $[-2\,,3]$.

2) Justifier que la fonction réciproque f^{-1} de f n'est pas dérivable au point -1.

3) Calculer $(f^{-1})'_d(3)$ et $(f^{-1})'_g(-2)$.

4) Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1}.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{4-x^2}{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que f est dérivable sur $[0\,,+\infty[$ et que $\forall x\in[0\,,+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{-10x}{(x^2+1)^2}$

2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,,+\infty[$ et préciser le nombre dérivé de f à droite en 0.

3) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur $]-1\,,4]$.

4) Soit g la réciproque de f.

a) Donner le tableau de variation de g

b) Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

c) Montrer que g est dérivable sur $]-1\,,4[$ on précisera la dérivabilité de g à gauche en 4

d) Expliciter $g(x)$ pour tout $x \in]-1\,,4]$.

Exercice 4

1) Soit la fonction f définie sur $]-4\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ soit C_f sa courbe représentative

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter les résultats graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3) a) Etudier la position relative de C_f et la droite $\Delta : y = x$

b) Tracer C_f ; $C_{f^{-1}}$ et Δ

4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = -1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} V_k$

c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de (U_n).

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]1\,,+\infty[$

b) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 1, interpréter le résultat graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1\,,+\infty[$ sur $[1\,,+\infty[$

b) Montrer que pour tout $x \in [1\,,+\infty[$ on a : $f\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) = x$

c) En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1\,,+\infty[$

3) a) Montrer que pour tout $x \in [1\,,+\infty[$ on a : $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}$

b) Montrer que pour tout $x \in [1\,,+\infty[$ on a : $\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right)$

c) En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1\,,+\infty[$

4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1 , +\infty[$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \sqrt{\tan x}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0^+ et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est une bijection de $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0 , +\infty[$.

3) Soit g la fonction réciproque de f.

Montrer que g est dérivable sur $[0 , +\infty[$ et que $\forall x \in [0 , +\infty[$ on a : $g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

4) Soit h la fonction définie sur $]0 , +\infty[$ par $h(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$

   a) Montrer que h est dérivable sur $]0 , +\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0 , +\infty[$.

   b) En déduire que $\forall x \in [0 , +\infty[$ on a : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

   c) Montrer alors que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + g\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ est une constante.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0 , +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x^2 + x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue sur $[0 , +\infty[$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

   b) Montrer que f est dérivable sur $]0 , +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

   c) En déduire que $\forall x \in]0 , +\infty[$; $f'(x) > 0$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f

   b) Montrer que f est une bijection de $[0 , +\infty[$ sur $[-1 , +\infty[$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0 , +\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]0 , 1[$

5) Soit f^{-1} la réciproque de f.

   a) Donner le sens de variation de f^{-1}

   b) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur $[-1 , +\infty[$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[1 , +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x}}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$

1) a) Dresser le tableau de variations de f.

   b) Montrer que f réalise une bijection de $[1 , +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

   d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1 , +\infty[$ et que $\alpha \in]1 , 2[$

2) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ les courbes de f et f^{-1} tout en précisant la demi tangente à C_f au point d'abscisse 0.

3) Montrer que pour tout $x \in [1\,,2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

4) Soit (U_n) la suite sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer pour $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. En déduire que la suite (U_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

b) Tracer C_f et T

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1\,,+\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1,5$

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J

c) Calculer en fonction de α ; $(f^{-1})'(\alpha)$.

d) Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1}.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{-x}{2x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$

b) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,,0[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1}.

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $]0\,,1]$ par $f(x)=\frac{2+\sqrt{1-x^2}}{x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,1[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in]0\,,1[$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer C_f (on prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\ cm$).

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0\,,2]$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

d) Tracer dans le même repère C' la courbe de f^{-1}

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de f et construire C_f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1\,,+\infty[$.

3) On désigne par h la fonction réciproque de f.

a) Etudier la dérivabilité de h à droite en 1.

b) Montrer que h est dérivable sur $]1\,,+\infty[$.

c) Expliciter $h'(x)$ pour tout $x\in]1\,,+\infty[$.

4) a) Calculer $h(1)$, $h(\sqrt{2})$ et $h(2)$

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $]0\,,1]$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x\in]0,1[$ on a : $f'(x)=\frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer f admet une fonction réciproque f^{-1}et déterminer son domaine de définition.

c) Tracer (C) et (C') courbe représentative de f^{-1}.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=f(cos^2x)$. Soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Montrer que pour tout $x\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x)=\frac{1}{2}\tan x$.

b) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha\in\left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Etudier la position relative de la droite Δ: $y=x$ et la courbe (C_g).

4) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{4x^2+1}$.

5) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit la suite S_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) - g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 14

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et continue sur $]-1, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$ et n'est pas dérivable en 0. On donne $f(0) = 0$

x	-1	$\frac{1}{2}$	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

1) Déterminer $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$

2) Montrer que f réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f, prouver que f^{-1} est dérivable en 0.

4) Soit h la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ par $h(x) = f(\sin x)$.

Montrer que $\lim_{x\to0^-} \frac{h(x)}{x} = +\infty$ et interpréter le résultat graphiquement.

5) a) Quel est le signe de $f'(\sin x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ justifier.

b) Dresser le tableau de variations de h sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

6) On donne $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{6\sqrt{3}}{2}$

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $h^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ et que $(h^{-1})'\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = 1$.

Exercice 15

I) Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par : $f(x) = \frac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a : $f'(x) = -\frac{[f(x)]^2}{4\sqrt{1-x}}$

b) Dresser le tableau de variation de .

c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-2, 0[$

b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -2.

c) Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

II) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f(\cos^2 x)$

1) Vérifier que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \frac{-2}{1+\sin x}$

2) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-2, -1]$

3) a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[-2, -1]$.

b) Montrer que pour tout $x \in [-2, -1]$ on a : $(g^{-1})' = \frac{-1}{x\sqrt{-(x+1)}}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = (n + n^2)\left[g^{-1}\left(-2 + \frac{1}{n}\right) - g^{-1}\left(-2 + \frac{1}{n+1}\right)\right]$

a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $\alpha_n \in \left]-2 + \frac{1}{n+1}, -2 + \frac{1}{n}\right[$ tel que

$$U_n = \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(1+\alpha_n)}}$$

b) En déduire la limite de la suite U.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \sqrt{\tan x}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0^+ et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$.

3) Soit g la fonction réciproque de f.

Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a : $g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

4) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

c) Montrer alors que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + g\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ est une constante.

Exercice 17

Soit la fonction : $x \mapsto 1 + \sin(\pi x)$ $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur $[0, 2]$.

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0.

d) Vérifier que : $\forall x \in]0\,,2[\ \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

2) Soit la fonction g définie sur $]0\,,2[$ par : $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0\,,2[$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\,,2[$.

c) Calculer $g(1)$. En déduire que : $\forall x \in]0\,,2[$ on a : $f^{-1}(2-x) = -f^{-1}(x)$.

3) Soit la suite réelle U définie sur IN^* par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $\forall k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ on a :

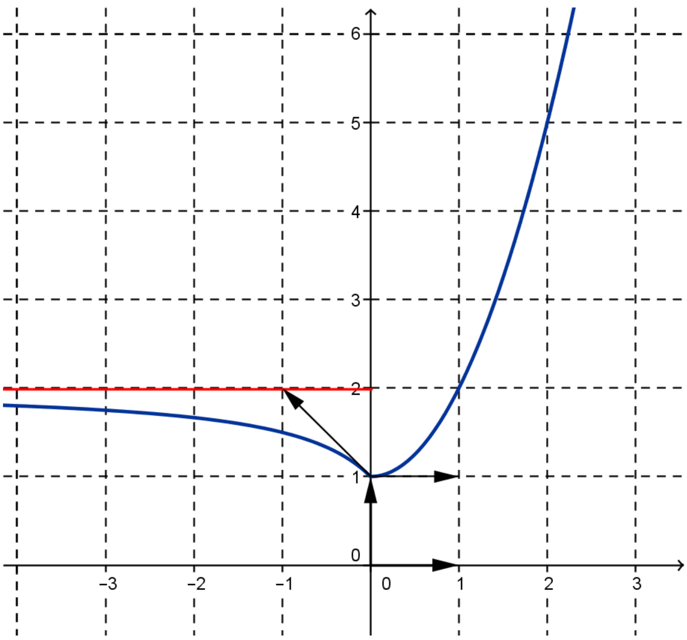
$$f^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \le f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \le f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

b) En déduire que : $\forall n \in IN^*$ on a : $\frac{n+1}{n}\, f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \le U_n \le \frac{n+1}{n}\, f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 18

La courbe C_f représentée ci-dessous et celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Déterminer graphiquement les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

2) a) Déterminer graphiquement $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.

b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0\,,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire la courbe $C_{g^{-1}}$ de g^{-1} puis dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c) Calculer $g^{-1}(2)$ puis $(g^{-1})'(2)$.

e) La fonction g^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ? Justifier votre réponse.

Exercice 19

Soit la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par : $f(x) = \frac{1}{\pi}\left(1+\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\right)$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0\,,1]$.

b) Vérifier que $\forall x \in [0\,,1]$ on a : $f'(x) = x\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,1]$ sur $\left[\frac{1}{\pi}\,,\frac{2}{\pi}\right]$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $\left]\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{2}{\pi}$

d) Calculer $f^{-1}\left(\frac{3}{2\pi}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2\pi}\right)$

3) Soit la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que $\forall x \in]0, 1[$ on a : $0 < f'(x) < 1$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution α

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, 1]$.

4) Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2}\alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \alpha$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.