Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{-10x}{(x^2+1)^2}$**
2) **Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ et préciser le nombre dérivé de f à droite en 0.**
3) **Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-1, 4]$.**
4) **Soit g la réciproque de f.**
   a) **Donner le tableau de variation de g**
   b) **Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.**
   c) **Montrer que g est dérivable sur $]-1, 4[$ on précisera la dérivabilité de g à gauche en 4**
   d) **Expliciter $g(x)$ pour tout $x \in]-1, 4]$.**

Exercice 2

1) **Soit la fonction f définie sur $]-4, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ soit C_f sa courbe représentative**
   a) **Calculer $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter les résultats graphiquement.**
   b) **Dresser le tableau de variation de f**
2) a) **Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.**
   b) **Calculer $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$**
   c) **Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.**
3) a) **Etudier la position relative de C_f et la droite $\Delta : y = x$**
   b) **Tracer C_f ; $C_{f^{-1}}$ et Δ**
4) **Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = -1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.**
   a) **Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq U_n \leq 1$**
   b) **Montrer que la suite (U_n) est croissante.**
   c) **En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.**
5) **Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$**
   a) **Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.**
   b) **En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} V_k$**
   c) **Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de (U_n).**

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x^2 + x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue sur $[0\,,+\infty[$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

b) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in]0\,,+\infty[\,;\ f'(x) > 0$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f est une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur $[-1\,,+\infty[$.

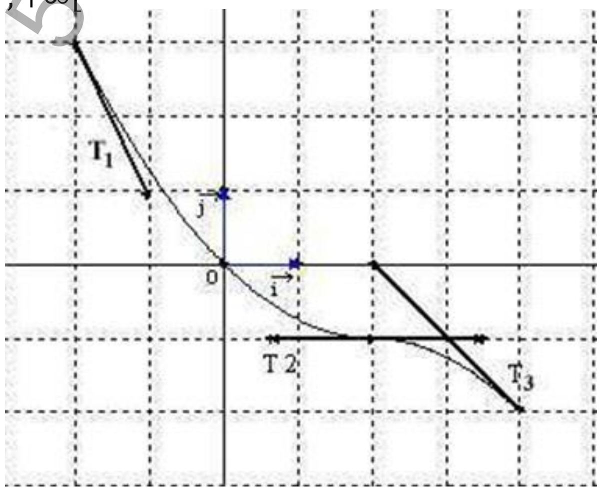
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0\,,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]0\,,1[$

5) Soit f^{-1} la réciproque de f.

a) Donner le sens de variation de f^{-1}

b) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur $[-1\,,+\infty[$

Exercice 4



Le graphique ci-contre est celui d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $[-2\,,4]$.

T_1 est la demi-tangente au point d'abscisse 1.

T_2 est la tangente au point de coordonnées $(2\,,-1)$.

T_3 est la tangente au point de coordonnées $(4\,,-2)$.

1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant

a) $f'_d(-2) = -2\ ;\ f'_g(4) = 2\ ;\ f'(2) = 0$

b) La fonction f réalise une bijection de $[-2\,,4]$ sur l'intervalle $[-2\,,3]$.

2) Justifier que la fonction réciproque f^{-1} de f n'est pas dérivable au point -1.

3) Calculer $(f^{-1})'_d(3)$ et $(f^{-1})'_g(-2)$.

4) Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1}.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x}}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

1) a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $[1\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1\,,+\infty[$ et que $\alpha \in]1\,,2[$

2) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ les courbes de f et f^{-1} tout en précisant la demi tangente à C_f au point d'abscisse 0.

3) Montrer que pour tout $x \in [1\,,2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

4) Soit (U_n) la suite sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer pour $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|U_n - \alpha|$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. En déduire que la suite (U_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

b) Tracer C_f et T

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1\,,+\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1{,}5$

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J

c) Calculer en fonction de α ; $(f^{-1})'(\alpha)$.

d) Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1}.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{-x}{2x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$

b) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,,0[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1}.

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $]0\,,1]$ par $f(x) = \frac{2+\sqrt{1-x^2}}{x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,1[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,,1[$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer C_f (on prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\ cm$).

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0\,,2]$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

d) Tracer dans le même repère C' la courbe de f^{-1}

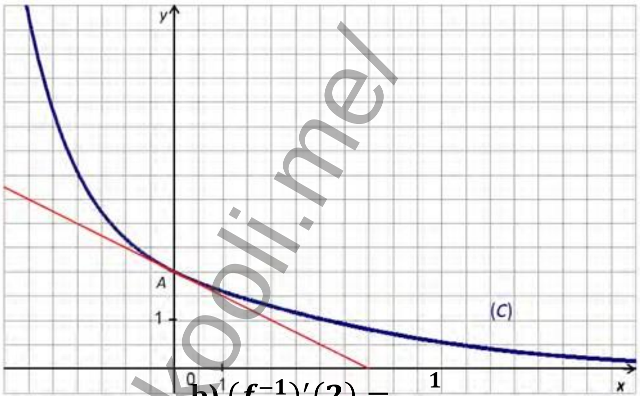
Exercice 9

Pour chaque question indiquer la réponse exacte.

1) Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ la bijection de $]2\,,+\infty[$ sur $]1\,,+\infty[$

a) $(f^{-1})(y) = \frac{-2y^2}{1-y^2}$ b) $(f^{-1})(y) = \frac{2y^2}{1-y^2}$ c) $(f^{-1})(y) = \frac{-2y^2}{y^2-1}$

2) La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



a) $(f^{-1})'(2) = -2$ b) $(f^{-1})'(2) = -\frac{1}{2}$ c) $(f^{-1})'(2) = 2$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de f et construire C_f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1\,,+\infty[$.

3) On désigne par h la fonction réciproque de f.

a) Etudier la dérivabilité de h à droite en 1.

b) Montrer que h est dérivable sur $]1\,,+\infty[$.

c) Expliciter $h'(x)$ pour tout $x \in\,]1\,,+\infty[$.

4) a) Calculer $h(1)$, $h(\sqrt{2})$ et $h(2)$

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $]0\,,1]$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $x \in\,]0, 1[$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer f admet une fonction réciproque f^{-1}et déterminer son domaine de définition.

c) Tracer (C) et (C') courbe représentative de f^{-1}.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(cos^2 x)$. Soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Etudier la position relative de la droite Δ: $y = x$ et la courbe (C_g).

4) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{4x^2+1}$.

5) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit la suite S_n définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) - g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 11

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et continue sur $]-1\,,+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]-1\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$ et n'est pas dérivable en 0. On donne $f(0) = 0$

x	-1	$\frac{1}{2}$	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

1) Déterminer $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$

2) Montrer que f réalise une bijection de $]-1\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f, prouver que f^{-1} est dérivable en 0.

4) Soit h la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,0\right]$ par $h(x) = f(\sin x)$.

Montrer que $\lim_{x\to0^-} \frac{h(x)}{x} = +\infty$ et interpréter le résultat graphiquement.

5) a) Quel est le signe de $f'(\sin x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,0\right[$ justifier.

b) Dresser le tableau de variations de h sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,0\right]$.

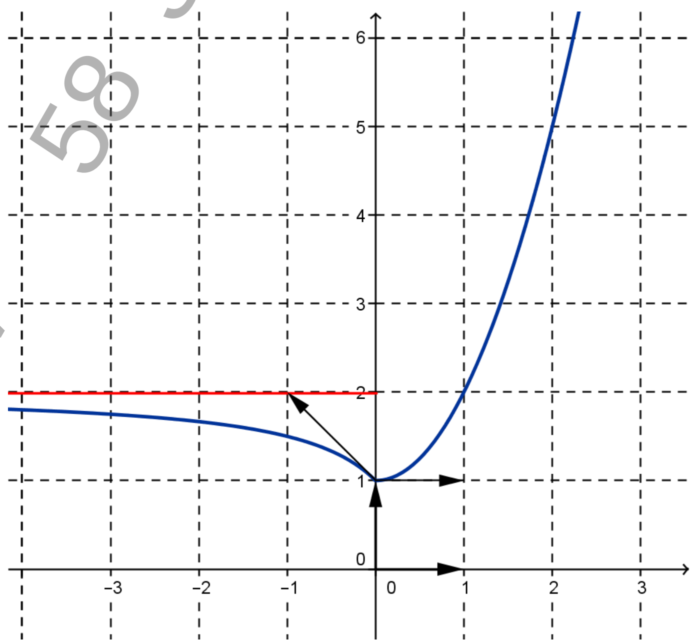
6) On donne $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{2}$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{6\sqrt{3}}{2}$

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,,0\right]$ sur $[0\,,+\infty[$.

b) Montrer que $h^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$ et que $(h^{-1})'\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)=1$.

Exercice 12

La courbe C_f représentée ci-dessous et celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Déterminer graphiquement les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

2) a) Déterminer graphiquement $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.

b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0\,,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire la courbe $C_{g^{-1}}$ de g^{-1} puis dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c) Calculer $g^{-1}(2)$ puis $(g^{-1})'(2)$.

e) La fonction g^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ? Justifier votre réponse.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{\tan x}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0^+ et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0\,,+\infty[$.

3) Soit g la fonction réciproque de f.

Montrer que g est dérivable sur $[0\,,+\infty[$ et que $\forall x\in[0\,,+\infty[$ on a : $g'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

4) Soit h la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $h(x)=g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que h est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\,]0\,,+\infty[$.

b) En déduire que $\forall x\in[0\,,+\infty[$ on a : $g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

c) Montrer alors que $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $g\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+g\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ est une constante.

Exercice 14

Soit la fonction : $x\mapsto 1+\sin(\pi x)$ $x\in\left[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$ sur $[0\,,\,2]$.

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0\,,2[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0.

d) Vérifier que : $\forall x \in]0\,,2[\ \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

2) Soit la fonction g définie sur $]0\,,2[$ par : $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0\,,2[$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\,,2[$.

c) Calculer $g(1)$. En déduire que : $\forall x \in]0\,,2[$ on a : $f^{-1}(2-x) = -f^{-1}(x)$.

3) Soit la suite réelle U définie sur IN^* par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ on a :

$$f^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \le f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \le f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

b) En déduire que : $\forall n \in IN^*$ on a : $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \le U_n \le \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par : $f(x) = \frac{1}{\pi}\left(1+\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\right)$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0\,,1]$.

b) Vérifier que $\forall x \in [0\,,1]$ on a : $f'(x) = x\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,1]$ sur $\left[\frac{1}{\pi}\,,\frac{2}{\pi}\right]$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $\left]\frac{1}{\pi}\,,\frac{2}{\pi}\right[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{2}{\pi}$

d) Calculer $f^{-1}\left(\frac{3}{2\pi}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2\pi}\right)$

3) Soit la fonction g définie sur $[0\,,1]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que $\forall x \in]0\,,1[$ on a : $0 < f'(x) < 1$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0\,,1]$ une unique solution α

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,,1]$.

4) Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2}\alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n \le \alpha$ b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.