

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[; f'(x) = \frac{-10x}{(x^2+1)^2}$
- 2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ et préciser le nombre dérivé de f à droite en 0.
- 3) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -1, 4]$.
- 4) Soit f^{-1} la réciproque de f .
 - a) Donner le tableau de variation de f^{-1}
 - b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.
 - c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $] -1, 4[$ on précisera la dérivabilité de f^{-1} à gauche en 4
 - d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in] -1, 4]$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x - 2$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f on précisera le nombre dérivé de f à droite en 1.
 b) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
 c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$ et que $2,6 < \alpha < 2,8$.
- 2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on notera f^{-1} et soit (C') sa courbe représentative.
 b) Déterminer $f^{-1}(-2)$ puis $(f^{-1})'(-2)$.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -3 .
 b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$ une unique solution β et que $3,5 < \beta < 3,6$.
 c) Construire (C) et (C')
- 4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [-3, +\infty[$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$. et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 b) Dresser le tableau de variation de f .
 c) Tracer la courbe C_f .
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$. On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa courbe représentative dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$, $f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2x}$.
 c) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$.
- 3) Soient (U_n) et (V_n) les suites réelles définies par :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^n f(\sqrt{k}), n \geq 2$$

- a) Vérifier que pour tout entier $k \geq 2$, $f(\sqrt{k}) = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ et en déduire que la suite (V_n) est convergente dont on précisera la limite.
- b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{2\sqrt{k}} \leq f(\sqrt{k}) \leq \frac{1}{2\sqrt{k-1}}$
- c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $2V_n + \frac{1}{n} \leq U_n \leq 2V_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$
- d) Montrer que alors la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- 1) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.
- c) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est continue sur $[1, +\infty[$.
- d) Préciser le sens de variation de la fonction f^{-1} sur $[1, +\infty[$.
- 2) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
- b) Montrer que f^{-1} n'est pas dérivable en 1.
- c) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in [1, +\infty[$.
- 3) Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- a) Montrer que la suite U est croissante.
- b) Montrer que la suite U n'est pas majorée. Déterminer alors la limite de la suite réelle U .

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \sin x$.

- 1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
- b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , donner son domaine de définition.
- c) Justifier que : $f^{-1}(0) = 0$.
- 3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$.
- b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à gauche en -1 et à droite en 1.
- c) Prouver que $\forall x \in] -1, 1[$ on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 4) Soit la fonction g définie par : $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$.
- a) Montrer que la fonction g est continue sur $[-1, 1]$ et qu'elle est dérivable sur $] -1, 1[$.
- b) Calculer pour tout $x \in] -1, 1[$ $g'(x)$
- c) Montrer alors que la fonction g est constante sur l'intervalle $[-1, 1]$.
- d) En déduire que la fonction f^{-1} est impaire.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Etudier les variations de f et construire C_f .
- 2) Montrer que f réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[1, +\infty[$.
- 3) On désigne par h la fonction réciproque de f .
 - a) Etudier la dérivabilité de h à droite en 1.
 - b) Montrer que h est dérivable sur $]1, +\infty[$.
 - c) Expliciter $h'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.
- 4) a) Calculer $h(1)$, $h(\sqrt{2})$ et $h(2)$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Tracer la courbe C_f .
- 2) Montrer que f réalise une bijection de I sur $J = [\frac{1}{2}, +\infty[$. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f et par $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1} .
- 3) a) Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(1)$.
b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en $\frac{1}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ et que pour tout $x > \frac{1}{2}$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{2x-1}}$
d) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$
- 4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet dans I une solution unique notée x_n
b) Étudier la monotonie de la suite (x_n) et en déduire qu'elle est convergente.
c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $]0, 1]$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}} - 1$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.
b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $x \in]0, 1[$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}} - 1}$
c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer son domaine de définition.
c) Tracer (C) et (C') courbe représentative de f^{-1} .
- 3) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $g(x) = f(\cos^2 x)$. Soit (C_g) sa courbe représentative.
a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a : $g(x) = \frac{1}{2} \tan x$.

- b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- c) Etudier la position relative de la droite $\Delta: y = x$ et la courbe (C_g) .
- 4) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Calculer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{4x^2+1}$.
- 5) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$.
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$.
- b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
- c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit la suite (S_n) définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $S_n = \sum_{k=0}^n g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) - g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{2 \sin x}{1 - \sin x}$

- 1) a) Vérifier que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x) = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$
- b) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur IR_+
- c) Montrer que g est dérivable sur IR_+
- d) Montrer que $\forall x \in IR_+$; $g'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$
- 2) Calculer la limite de la suite (U_n) définie sur IN^* par : $U_n = g\left(\frac{2}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)$.
- 3) Soit la suite (V_n) définie sur IN^* par : $V_n = nU_n$
- a) Montrer que $\forall n \in IN^*$: il existe un réel $c_n \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ tel que $V_n = \frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$
- b) Déterminer alors la limite de suite (V_n)

Exercice 10

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + \sin(\pi x)$; $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

- 1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur $[0, 2]$.
- b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f . Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$.
- c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0.
- c) Vérifier que : $\forall x \in]0, 2[$ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$
- 2) Soit la fonction g définie sur $]0, 2[$ par : $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.
- a) Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$.

- b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0, 2[$.
- c) Calculer $g(1)$. En déduire que : $\forall x \in]0, 2[$ on a : $f^{-1}(2-x) = -f^{-1}(x)$.
- 3) Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$
- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ on a :
- $$f^{-1}\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \leq f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
- b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x^2 + x}$ et soit (C) sa courbe.

- 1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
c) En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a : $f'(x) > 0$.
- 3) a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]0, 1[$.
- 5) Soit f^{-1} la réciproque de f .
a) Donner le sens de variation de f^{-1} .
b) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur $[-1, +\infty[$.
a) Montrer alors que $G\left(\frac{1}{2}\right) + G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 12

A) Soit la fonction f définie sur $]0, 1]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que f est continue sur $]0, 1]$.
b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$.
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$.
b) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ (on prendra pour unité graphique 2 cm).
c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

B) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g = \frac{1}{1+x^2}$

Soit G une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $G(0) = 0$ et $G'(x) = g(x)$.

- 1) a) Montrer que G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b) En déduire que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $G(\mathbb{R})$.

2) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = G(x) + G(-x)$.

- a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- b) En déduire que G est impaire.
- 3) On pose pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $H(x) = G(\tan x) - x$.
- a) Montrer que H est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et calculer $H'(x)$ pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- b) En déduire que pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ on a : $G(\tan x) = x$.
- c) Calculer $G(1)$.
- d) Montrer que $G(\mathbb{R}) = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et déterminer $G^{-1}(x)$ pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
- 4) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $k(x) = G\left(\frac{1}{x+1}\right) + G\left(\frac{1}{x+2}\right)$.
- a) Montrer que k est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- b) Expliciter $k'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe (C)
- 2) Montrer que le point $\Omega(0, 1)$ est un centre de symétrie de (C)
- 3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 4) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère.
- 5) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha > 1$.
- 6) Soit la fonction h définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par : $h(x) = \tan x$.

On pose $H = f \circ h$ et $G = \frac{1}{f \circ h}$

- a) Expliciter $H(x)$ et $G(x)$ pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Montrer que G est une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Etudier la dérivabilité de G^{-1} sur J et calculer $(G^{-1})'(x)$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = \frac{1}{\pi} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) \right)$.

- 1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$.
- b) Vérifier que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $f'(x) = x \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$.
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.
- b) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $\left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.
- c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{2}{\pi}$.
- d) Calculer $f^{-1}\left(\frac{3}{2\pi}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2\pi}\right)$.

- 3) Soit la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$
- Montrer que $\forall x \in]0, 1[$ on a : $0 < f'(x) < 1$
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution α
 - En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, 1]$.
- 4) Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2}\alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \alpha$
 - Montrer que la suite (U_n) est croissante.
 - En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par $f(x) = \tan(\pi x)$

- Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sur $\mathbb{R}$
 - On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f ; montrer que $f^{-1}(1) = \frac{1}{4}$
 - Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$
 - Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
- Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
 - Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$
 - Calculer $(g)'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$
 - En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} - f^{-1}(x)$

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \sqrt{\tan x}$ et soit (C) sa courbe représentative.

- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
- Montrer que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$.
- Soit g la fonction réciproque de f .

Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a : $g'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

- Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$
 - Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
 - En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
 - Montrer alors que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g(\sqrt{x^2+1}-x) + g(\sqrt{x^2+1}+x)$ est une constante.

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{4}, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+\tan x} & \text{si } -\frac{\pi}{4} < x \leq 0 \\ 1-x+\sqrt{x^2+2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Etudier la continuité de f en 0.
 b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
 c) Dresser le tableau de variation de f , puis tracer (C) .
- 2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}, 0]$
 a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{4}, 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en 1 et interpréter le résultat graphiquement.
 c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour $x \in J$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{2x^2-2x+1}$
- 3) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$
 a) Montrer que h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
 b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} à droite en 1 et interpréter le résultat graphiquement.
 c) Construire la courbe (C') représentative de h^{-1} .
 b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.

Exercice 18

- I) Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par : $f(x) = \frac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$
 1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a : $f'(x) = -\frac{[f(x)]^2}{4\sqrt{1-x}}$
 b) Dresser le tableau de variation de .
 c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-2, 0[$
 b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -2 .
 c) Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- II) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f(\cos^2 x)$
 1) Vérifier que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $g(x) = \frac{-2}{1+\sin x}$
 2) Montrer que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-2, -1]$
 3) a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[-2, -1]$.
 b) Montrer que pour tout $x \in [-2, -1]$ on a : $(g^{-1})' = \frac{-1}{x\sqrt{-(x+1)}}$
 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = (n + n^2) \left[g^{-1}\left(-2 + \frac{1}{n}\right) - g^{-1}\left(-2 + \frac{1}{n+1}\right) \right]$
 a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $\alpha_n \in \left]-2 + \frac{1}{n+1}, -2 + \frac{1}{n}\right[$ tel que

$$U_n = \frac{-1}{\alpha_n \sqrt{-(1 + \alpha_n)}}$$

b) En déduire la limite de la suite U .

Exercice 19

Soit la fonction f définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}_+$

b) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

et que $\forall x \in \mathbb{R}_+ (f^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

2) Soit la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

a) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$

b) Vérifier que $\forall x \in]0, +\infty[; h'(x) = 0$

c) Calculer $f^{-1}(1)$; déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[$ on a : $f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi - f^{-1}(\sqrt{x})$

3) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} f^{-1}(\sqrt{k}) \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall k \in \mathbb{N}^*$ si $n \leq k \leq 2n$ alors $f^{-1}(\sqrt{n}) \leq f^{-1}(\sqrt{k}) \leq f^{-1}(\sqrt{2n})$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f^{-1}(\sqrt{n}) \leq U_n \leq f^{-1}(\sqrt{2n})$

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \pi$ déterminer alors la limite de la suite (U_n)

d) Exprimer V_n en fonction de U_n puis déterminer la limite de la suite (V_n)

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

b) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .

b) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ en précisant la demi tangente au point d'abscisse 0.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f(\sin x)$

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $g(x) = \tan x$.

b) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que la fonction g^{-1} réciproque de g est dérivable sur $[0, +\infty[$.

et que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

4) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

- a) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$
- b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $h(x) = \frac{\pi}{2}$
- 5) On considère les suites (S_n) et (U_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n g^{-1}(k+1) - g^{-1}(k) \quad U_n = g^{-1}\left(\frac{2}{n}\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

- a) Montrer que $S_n = -\frac{\pi}{4} + g^{-1}(n+1)$ calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \text{il existe un réel } c_n \in \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[\text{ tel que } nU_n = \frac{1}{1+c_n^2}$
- c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$.

Exercice 21

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 10 + \frac{1}{x^2}$

- 1) a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
- b) Déterminer $f(\mathbb{R}_+)$.
- 2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = f(x) - x$
- a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on déterminera.
- b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une unique solution α telle que $\alpha \geq 10$.
- 3) Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$
- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 10$
- b) Montrer que $\forall x \geq 10$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{500}$
- c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{500} |U_n - \alpha|$
- d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{500}\right)^n |U_0 - \alpha|$
- e) Déterminer alors la limite de (U_n) .

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ et soit (C_f) sa représentation graphique orthonormé

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(1+\sqrt{x^2+1})}$
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) a) Montrer que le point $I(0, 1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
- b) Donner une équation de la tangente T à (C_f) au point I .
- c) Tracer (C_f) et la droite $\Delta : y = x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 2[$.

- b)** Montrer que pour tout $x \in]0, 2[$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}$
- c)** Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4)** Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$\begin{cases} g(x) = f(\tan x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$$
- a)** Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- b)** Montrer pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $g(x) = 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
- c)** Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1, 2]$.
- d)** Soit g^{-1} la fonction réciproque de g , montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1, 2]$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2}$
- e)** Montrer pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- 5)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^n g^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$ et $V_n = \frac{U_n}{n+1}$
- a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g^{-1}\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \leq g^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq g^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- b)** En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$
- c)** Soit $W_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g^{-1}\left(\frac{2(n+k)}{1+n+k}\right)$ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$