Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{4-x^2}{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\forall x \in [0,+\infty[\,;\, f'(x)=\frac{-10x}{(x^2+1)^2}$

2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$ et préciser le nombre dérivé de f à droite en 0.

3) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-1,4]$.

4) Soit f^{-1} la réciproque de f.

   a) Donner le tableau de variation de f^{-1}

   b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

   c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,4[$ on précisera la dérivabilité de f^{-1} à gauche en 4

   d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-1,4]$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=x^2-2x-2$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) **a)** Dresser le tableau de variation de f on précisera le nombre dérive de f à droite en 1.

   b) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

   c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$ et que $2,6<\alpha<2,8$.

2) **a)** Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on notera f^{-1} et soit (C') sa courbe représentative.

   b) Déterminer $f^{-1}(-2)$ puis $(f^{-1})'(-2)$.

3) **a)** Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -3.

   b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $[1,+\infty[$ une unique solution β et que $3,5<\beta<3,6$.

   c) Construire (C) et (C')

4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [-3,+\infty[$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$. et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Tracer la courbe C_f .

2) **a)** Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$. On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa courbe représentative dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   b) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2x}$.

   c) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$.

3) Soient (U_n) et (V_n) les suites réelles définies par :

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad V_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n} f\left(\sqrt{k}\right),\ n\geq 2$$

a) Vérifier que pour tout entier $k \geq 2, f(\sqrt{k}) = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ et en déduire que la suite (V_n) est convergente dont on précisera la limite.

b) Montrer que pour tout entier ≥ 2, $\frac{1}{2\sqrt{k}} \leq f(\sqrt{k}) \leq \frac{1}{2\sqrt{k-1}}$

c) Montrer que pour tout entier ≥ 2, $2V_n + \frac{1}{n} \leq U_n \leq 2V_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) Montrer que alors la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1) **a)** Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.

c) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est continue sur $[1,+\infty[$.

d) Préciser le sens de variation de la fonction f^{-1} sur $[1,+\infty[$.

2) **a)** Montrer que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

b) Montrer que f^{-1} n'est pas dérivable en 1.

c) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in [1,+\infty[$.

3) Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite U est croissante.

b) Montrer que la suite U n'est pas majorée. Déterminer alors la limite de la suite réelle U.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \sin x$.

1) **a)** Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

b) Montrer que f admet une fonction réciproquer f^{-1}, donner son domaine de définition.

c) Justifier que : $f^{-1}(0) = 0$.

3) **a)** Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à gauche en -1 et à droite en 1.

c) Prouver que $\forall x \in]-1,1[$ on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) Soit la fonction g définie par : $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$.

a) Montrer que la fonction g est continue sur $[-1,1]$ et qu'elle est dérivable sur $]-1,1[$.

b) Calculer pour tout $x \in]-1,1[$ $g'(x)$

c) Montrer alors que la fonction g est constante sur l'intervalle $[-1,1]$.

d) En déduire que la fonction f^{-1} est impaire.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de f et construire C_f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1\,,+\infty[$.

3) On désigne par h la fonction réciproque de f.

a) Etudier la dérivabilité de h à droite en 1.

b) Montrer que h est dérivable sur $]1\,,+\infty[$.

c) Expliciter $h'(x)$ pour tout $x \in\,]1\,,+\infty[$.

4) a) Calculer $h(1)$, $h(\sqrt{2})$ et $h(2)$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe C_f.

2) Montrer que f réalise une bijection de I sur $J = \left[\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$. On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f et par $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1}.

3) a) Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(1)$.

b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en $\frac{1}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$ et que pour tout $x > \frac{1}{2}$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{2x-1}}$

d) Tracer la courbe Cf -1

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet dans I une solution unique notée x_n

b) Étudier la monotonie de la suite (x_n) et en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $]0\,,1]$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x \in\,]0,1[$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer f admet une fonction réciproque f^{-1}et déterminer son domaine de définition.

c) Tracer (C) et (C') courbe représentative de f^{-1}.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(cos^2x)$. Soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Etudier la position relative de la droite Δ: $y = x$ et la courbe (C_g).

4) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{4x^2+1}$.

5) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit la suite S_n définie sur $\mathbb{N}$ par $\sum_{k=0}^{n}\left(g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) - g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)\right)$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{2\sin x}{1-\sin x}$

1) a) Vérifier que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; $f'(x) = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$

b) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur IR_+

c) Montrer que g est dérivable sur IR_+

d) Montrer que $\forall x \in IR_+$; $g'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

2) Calculer la limite de la suite (U_n) définie sur IN^* par : $U_n = g\left(\frac{2}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) Soit la suite (V_n) définie sur IN^* par : $V_n = nU_n$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$: il existe un réel $c_n \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$ tel que $V_n = \frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$

b) Déterminer alors la limite de suite $(\mathrm{V_n})$

Exercice 10

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + \sin(\pi x)$; $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur $[0, 2]$.

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0.

c) Vérifier que : $\forall x \in]0, 2[$ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

2) Soit la fonction g définie sur $]0, 2[$ par :$g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0, 2[$.

c) Calculer $g(1)$. En déduire que : $\forall x \in]0, 2[$ on a : $f^{-1}(2-x) = -f^{-1}(x)$.

3) Soit la suite réelle U définie sur IN^* par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ on a :

$$f^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \leq f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

b) En déduire que : $\forall n \in IN^*$ on a : $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x^2+x}$ et soit (C) sa courbe.

1) Montrer que f est continue sur $[0\,,+\infty[$.

2) **a)** Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in]0\,,+\infty[$ on a : $f'(x) > 0$.

3) **a)** Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f est une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur $[-1\,,+\infty[$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0\,,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]0\,,1[$.

5) Soit f^{-1} la réciproque de f.

a) Donner le sens de variation de f^{-1}

b) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur $[-1\,,+\infty[$.

Exercice 12

A) Soit la fonction f définie sur $]0\,,1]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) **a)** Montrer que f est continue sur $]0\,,1]$.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,1[$.

2) **a)** Montrer que f réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur $[0\,,+\infty[$.

b) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ (on prendra pour unité graphique 2 cm).

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

B) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g = \frac{1}{1+x^2}$

Soit G une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $G(0) = 0$ et $G'(x) = g(x)$.

1) **a)** Montrer que G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $G(\mathbb{R})$.

2) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = G(x) + G(-x)$.

a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que G est impaire.

3) On pose pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = G(\tan x) - x$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$ pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G(\tan x) = x$.

c) Calculer $G(1)$.

d) Montrer que $G(\mathbb{R}) = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $G^{-1}(x)$ pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4) On pose pour tout $\in \mathbb{R}_+$, $k(x) = G\left(\frac{1}{x+1}\right) + G\left(\frac{1}{x+2}\right)$.

a) Montrer que k est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Montrer alors que $G\left(\frac{1}{2}\right) + G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe (C)

2) Montrer que le point $\Omega(0, 1)$ est un centre de symétrie de (C)

3) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera.

4) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère.

5) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha > 1$.

6) Soit la fonction h définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = \tan x$.

On pose $H = f \, o \, h$ et $G = \frac{1}{f \, o \, h}$

a) Expliciter $H(x)$ et $G(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que G est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de G^{-1} sur J et calculer $(G^{-1})'(x)$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = \frac{1}{\pi}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\right)$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$.

b) Vérifier que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $f'(x) = x\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $\left]\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{2}{\pi}$

d) Calculer $f^{-1}\left(\frac{3}{2\pi}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2\pi}\right)$

3) Soit la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que $\forall x \in]0, 1[$ on a : $0 < f'(x) < 1$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution α

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, 1]$.

4) Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2}\alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \alpha$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(\pi x)$

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ sur IR

b) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f ; montrer que $f^{-1}(1) = \frac{1}{4}$

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR

d) Vérifier que $\forall x \in IR$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

2) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par ; $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$

b) Calculer $(g)'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

c) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} - f^{-1}(x)$

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \sqrt{\tan x}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$.

3) Soit g la fonction réciproque de f.

Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a : $g'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

4) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

c) Montrer alors que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + g\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ est une constante.

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+\tan x} & si\ -\frac{\pi}{4} < x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x^2+2x} & si\ x > 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de f, puis tracer (C).

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour $x \in J$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{2x^2-2x+1}$

3) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0\,,+\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} à droite en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

c) Construire la courbe (C') représentative de h^{-1}.

b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $[0\,,\pi[$ par $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,\pi[$ sur IR_+

b) Montrer que la fonction f^{-1} reciproque de f est derivable sur IR_+

et que $\forall x \in IR_+$ $(f^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

2) Soit la fonction h définie sur $]0\,,+\infty[$ par $h(x) = f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

a) Montrer que h est dérivable sur $]0\,,+\infty[$

b) Vérifier que $\forall x \in\,]0\,,+\infty[\,;\ h'(x) = 0$

c) Calculer $f^{-1}(1)$; déduire que : $\forall x \in\,]0\,,+\infty[$ on a : $f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi - f^{-1}(\sqrt{x})$

3) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur IN^* par :

$$U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} f^{-1}(\sqrt{k}) \qquad et \qquad V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} f^{-1}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)$$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $\forall k \in IN^*$ si $n \le k \le 2n$ alors $f^{-1}(\sqrt{n}) \le f^{-1}(\sqrt{k}) \le f^{-1}(\sqrt{2n})$

b) En déduire que $\forall n \in IN^*$ on a : $f^{-1}(\sqrt{n}) \le U_n \le f^{-1}(\sqrt{2n})$

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = \pi$ déterminer alors la limite de la suite (U_n)

d) Exprimer V_n en fonction de U_n puis déterminer la limite de la suite (V_n)

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $[0\,,1[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0\,,1[$ on a $f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

b) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ en précisant la demi tangente au point d'abscisse 0.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(\sin x)$

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $g(x) = \tan x$.

b) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0\,,+\infty[$.

c) Montrer que la fonction g^{-1} réciproque de g est dérivable sur $[0\,,+\infty[$.

et que $\forall x \in [0\,,+\infty[$ on a $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

4) Soit h la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $h(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$

b) En déduire que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$ on a $h(x) = \frac{\pi}{2}$

5) On considère les suites (S_n) et (U_n) définies sur IN^* par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} g^{-1}(k+1) - g^{-1}(k) \qquad\qquad U_n = g^{-1}\left(\frac{2}{n}\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

a) Montrer que $S_n = -\frac{\pi}{4} + g^{-1}(n+1)$ calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

b) Montrer que $\forall n \in IN^*$: il existe un réel $c_n \in \left]\frac{1}{n}\,,\frac{2}{n}\right[$ tel que $nU_n = \frac{1}{1+c_n^2}$

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$.

Exercice 20

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 10 + \frac{1}{x^2}$

1) **a)** Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer $f(\mathbb{R}_+^*)$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle que l'on déterminera.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution α telle que $\alpha \geq 10$.

3) Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 10$

b) Montrer que $\forall x \geq 10$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{500}$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{500}|U_n - \alpha|$

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{500}\right)^n |U_0 - \alpha|$

e) Déterminer alors la limite de (U_n).