Fonctions primitives 4ème Sc Techniques

Exercice 1

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes sur un intervalle bien choisie

$f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 3$; $f(x) = \frac{2}{x^3} - \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$; $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$; $f(x) = \frac{x^4-2x^2+3}{x^2}$

$f(x) = -2\cos(2x-1) + 3\sin(4x+3)$; $f(x) = \frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x}}$; $f(x)(-2x+1)(x^2-x-2)^3$

$f(x) = \frac{1}{\tan^2 x} + 1$; $f(x) = \cos^2 x$; $f(x) = \sin^2 x$; $f(x) = \tan^3 x + \tan x$

$f(x) = \frac{2x\cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$; $f(x) = \frac{\cos x}{1-\cos^2 x}$; $f(x) = \cos^3 x \sin x$; $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{x^3-x^2-x+5}{(x-1)^2}$

1) Déterminer trois réels , b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

2) Déterminer une primitive de f sur $]1, +\infty[$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan^2 x + 3x - 1$

1) Montrer que f admet au moins une primitive F sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

2) Déterminer la fonction F qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x^4-2x^2+4}{x^2}$

1) Montrer que f admet au moins une primitive F sur $]0, +\infty[$

2) Déterminer la fonction F tel que $F(1) = 0$

Exercice 5

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\cos x$ et $g(x) = x\sin x$

1) Calculer $f'(x) + g(x)$, en déduire une primitive G de g sur $\mathbb{R}$

2) Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 6

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \cos(3x)$ et $g(x) = \sin x \sin(3x)$

1) a) Déterminer une primitive de chacune des fonctions $f + g$ et $f - g$

b) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g

2) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (1 + \cos x)\sin(4x)$ $\quad h(x) = (1+\cos x)\sin 4x$.

Déterminer la primitive H de h qui s'annule en π

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1) Montrer f admet une unique primitive F sur $[0\,,+\infty[$ tel que $F(0) = 0$

2) Soit G la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F(\tan x)$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $G'(x)$

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $G(x) = x$

c) En déduire que la fonction $u(x) = \tan x$ est la fonction réciproque de F

c) Calculer : $F(0)$; $F(\sqrt{3})$ et $F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]-1\,,1[$ $\mathrm{I} =$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1) Montrer f admet une unique primitive F sur $]-1\,,1[$ tel que $F(0) = 0$

2) On pose pour tout $x \in\,]-1\,,1[$ $h(x) = F(-x) + F(x)$.

a) Montrer que pour tout $x \in\,]-1\,,1[$; $h'(x) = 0$

b) En déduire $h(x)$

c) Montrer alors que la fonction F est impaire

3) Soit G la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F(\sin x)$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $G'(x)$

b) En déduire que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $G(x) = x$

c) Calculer : $F\left(\frac{1}{2}\right)$; $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$