Exercice 1

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes sur un intervalle bien choisie

$f(x)=5x^4+3x^2-3$; $f(x)=\frac{2}{x^3}-\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$; $f(x)=2\cos x-3\sin x$; $f(x)=\frac{x^4-2x^2+3}{x^2}$

$f(x)=-2\cos(2x-1)+3\sin(4x+3)$; $f(x)=\frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x}}$; $f(x)(-2x+1)(x^2-x-2)^3$

$f(x)=\frac{1}{\tan^2 x}+1$; $f(x)=\cos^2 x$; $f(x)=\sin^2 x$: $f(x)=\tan^3 x+\tan x$

$f(x)=\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$; $f(x)=\frac{\cos x}{1-\cos^2 x}$; $f(x)=\cos^3 x\sin x$; $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x)=\frac{x^3-x^2-x+5}{(x-1)^2}$

1) **Déterminer trois réels , b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$; $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}$**

2) **Déterminer une primitive de f sur $]1,+\infty[$**

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan^2 x-\sin^2 x$

1) **Montrer que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $f(x)=(\tan^2 x)(\sin^2 x)$**

2) **Montrer que la fonction F définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x)=\frac{1}{4}(4\tan x+\sin(2x)-6x)$ est une primitive de f**

3) **Déterminer la primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $F(0)=1$**

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

1) a) **Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2,2]$**

b) **Soit F la primitive de f sur $[-2,2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F**

2) **Soit G la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $G(x)=F(2\cos x)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$**

a) **Calculer $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$**

b) **Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de (C)**

c) **Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi]$ et que pour tout $x\in[0,\pi]$ on a : $G'(x)=-4\sin^2 x$**

3) a) En déduire que que pour tout $x \in [0\,,\pi]$ on a : $G(x) = \pi - 2x + \sin(2x)$

b) Etudier les variations de G

c) Calculer (1) , $F(2)$ et $F(\sqrt{2})$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[-2\,,2]$ par : $f(x) = x^2 - \sqrt{4 - x^2}$.

1) a) Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2\,,2]$

b) Soit F la primitive de f sur $[-2\,,2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F.

2) Soit g la fonction définie sur $[0\,,\pi]$ par : $g(x) = F(2\cos x)$ et soit C_g sa courbe représentative.

a) Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}\,,0\right)$ est un centre de symétrie de C_g.

b) Montrer que g est dérivable sur $[0\,,\pi]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0\,,\pi]$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0\,,\pi]$ on a : $g(x) = 2x + \frac{8}{3}cos^3 x - \sin 2x - \pi$

d) Calculer $F(1)$ et $F(2)$.

Exercice 6

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \cos(3x)$ et $g(x) = \sin x \sin(3x)$

1) a) Déterminer une primitive de chacune des fonctions $f + g$ et $f - g$

b) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g

2) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (1 + \cos x)\sin(4x)$.

Déterminer la primitive H de h qui s'annule en π.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0\,,1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $f^{-1}(1)$ et $(f^{-1})'(1)$

3) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

4) Soit F la primitive de f sur $[0\,,1[$ qui s'annule en 0.

On considère la fonction g définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = F(\sin^2 x)$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire que pour tout $\in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = x - \frac{1}{2}\sin(2x)$. Calculer alors $F\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $I =]-1\,,1[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1) **Montrer f admet une unique primitive F sur I tel que $F(0) = 0$**
2) **On pose $\forall x \in I$; $h(x) = F(-x) + F(x)$.**
   a) **Montrer que $\forall x \in I$ on a : $h'(x) = 0$**
   b) **En déduire $h(x)$**
   c) **Montrer alors que la fonction F est impaire**
3) **Soit G la fonction définie sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F(\sin(x)$**
   a) **Montrer que G est dérivable sur J et déterminer $G'(x)$**
   b) **En déduire que $\forall x \in J$ on a : $G(x) = x$**
   c) **Calculer : $F\left(\frac{1}{2}\right)$; $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.**

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et soit C_F sa courbe représentative.

1) **Montrer que f admet une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ tel que $F(0) = 0$**
2) a) **Ecrire une équation de la tangente T à la courbe C_F au point d'abscisse 0.**
   b) **Donner le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = F(x) - x$.**
   c) **Etudier la position relative de C_F et T pour $x \geq 0$.**
3) **Montrer que F est impaire.**
4) **Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $H(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$**
   a) **Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $H'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$**
   b) **En déduire de pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $H(x) = 2F(1) - F(x)$**
   c) **En déduire que F admet une limite finie α en $+\infty$.**
5) **Soit G la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F(\tan x)$.**
   a) **Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.**
   b) **En déduire que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G(x) = x$. Donner la valeur de α.**
6) **Dresser le tableau de variation de F puis tracer T et C_F.**
7) **On pose pour tout $\in \mathbb{R}_+$; $U(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$.**
   a) **Montrer que U est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $U'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.**
   b) **En déduire la valeur du réel $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right)$.**