Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - x & si\ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Etudier la branche infinie de C.

c) Construire la courbe C.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en -1

4) Tracer C' la courbe de g^{-1} dans le même repère.

5) Soit la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = x^2 \ln x$.

a) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

b) Montrer l'existence et l'unicité de la primitive F de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1

c) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $g'(x) = -4x\ln x$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α.

b) Vérifier que $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$.

c) Déduire le signe de g(x) sur $]0, +\infty[$.

4) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

5) a) Etudier les variations de f.

b) Tracer la courbe C_f de f.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 ln^2 x & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Tracer C_f (unité graphique $4\ cm$).

Exercice 4

I/ Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$.

1) Etudier les variations de g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0\,,+\infty[$ une unique solution α et que $1,2 < \alpha < 1,3$.

3) En déduire le signe de $g(x)$, pour tout $x \in]0\,,+\infty[$.

II/ Soit la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = x - 2 - 2\frac{\ln x}{x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Montrer que $f(\alpha) = 2\alpha - 2 - \frac{2}{\alpha}$

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 2$ est une asymptote à C_f.

   b) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

4) Tracer Δ et C_f.

5) Déterminer la primitive F de f sur $]0\,,+\infty[$ qui vérifie $F(1) = -1$.

Exercice 5

1) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = -1 + \ln x$.

   a) Dresser le tableau de variation de g

   b) Calculer $g(e)$ et déterminer le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$.

   c) Déterminer la primitive G de g sur $]0\,,+\infty[$ qui s'annule en 1.

2) Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x & si\ \ x > 0. \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

   a) Montrer que f est continue à droite en 0

   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. et interpréter les résultats graphiquement.

   b) Montrer que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$; $f'(x) = xg(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f

4) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point $A(1\,, f(1))$.

b) Montrer que A est un point d'inflexion de C_f.

5) a) Déterminer l'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

b) Tracer T et C_f.

6) Soit F la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$.

Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,,+\infty[$.

Exercice 6

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte.

1) La fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x$ est :

a) croissante sur $]0\,,+\infty[$ b) décroissante sur $]0\,,+\infty[$ c) n'est pas monotone sur $]0\,,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{x-1}$ est égale à :

a) 0 b) 2 c) 1

3) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est :

a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ b) $\ln(x^2+1)$ c) $2\ln(x^2+1)$

4) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} \frac{\ln(2x+4)}{2x+3}$ est égale à :

a) 0 b) 1 c) $+\infty$ d) -1

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(4x+2)}{\sqrt{x}-1}$ est égale à :

a) 2 b) -1 c) 0 d)$+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^4}{\ln x}$ est égale à :

a) 4 b) 1 c) $+\infty$ d) 0

Exercice 7

1) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{3+3\ln x}{x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et interpréter les résultats graphiquement.

b) Montrer que pour tout $x \forall\,]0\,,+\infty[$ $f'(x) = \frac{-3\ln x}{x^2}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,,+\infty[$ une unique solution α et que $0,32 < \alpha < 0.,34$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

3) Tracer C_f.

Exercice 8

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\ln x}$ est égale à :

a) 0 b) 1 c) $+\infty$

2) L'ensemble des solutions de l'inéquation : $\ln(x+3) < \ln 6$ est :

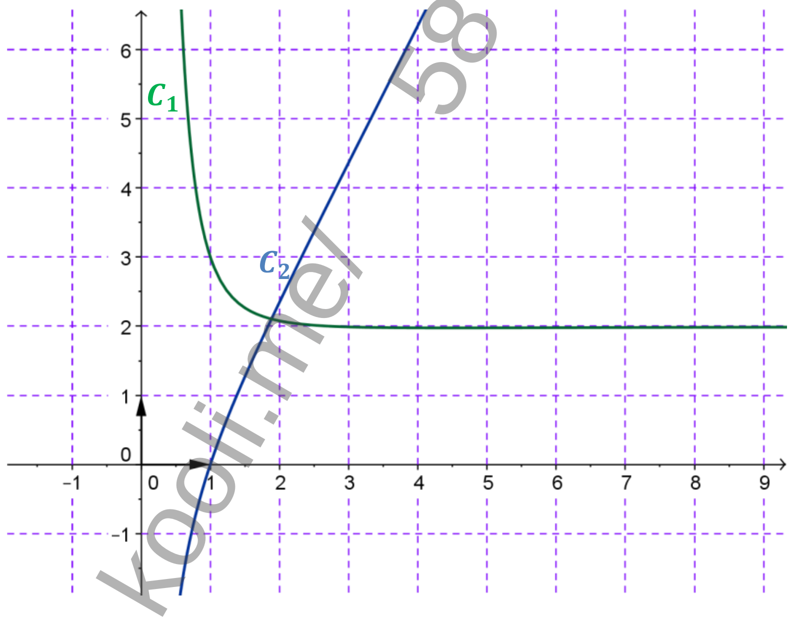
a) $]-3\,,3[$ b) $]-\infty\,,3[$ c) $]0\,,3[$

3) Si $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ alors une primitive F de f sur $\left]\frac{1}{3}\,,+\infty\right[$ est :

a) $F(x) = \ln(3x-1)$ b) $F(x) = 3\ln(3x-1)$ c) $F(x) = \frac{1}{3}\ln(3x-1)$

Exercice 9

On donne ci-dessous deux courbes C_1 et C_2 l'une d'une fonction f et l'autre de sa fonction dérivée f' définies et dérivables sur $]0\,,+\infty[$.



1) Par lecture graphique déterminer la courbe de f et celle de f'.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

3) On suppose que $f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$ pour tout $\in\,]0\,,+\infty[$.

a) Montrer pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$; $f'(x) = a + \frac{1-\ln x}{x^2}$

b) En utilisant ce qui précède déterminer a et b.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

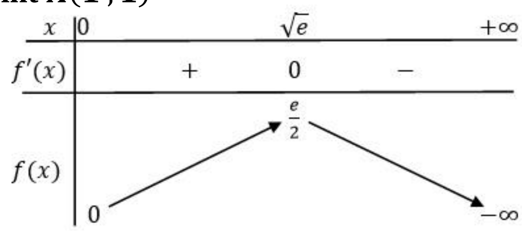
b) Tracer la courbe de f^{-1} réciproque de f dans le même repère.

Exercice 10

Le tableau ci-contre représente les variations d'une fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$.

On suppose que la courbe représentative C_f passe par le point $A(1\,,1)$

et que la tangente à C_f en A est la droite $T : y = x$.



1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que la fonction f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(1-\ln x) & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement .

3) **a)** Montrer que C_f admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ que l'on précisera.

d) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et l'axe des abscisses.

4) Tracer T et C_f.

Exercice 11

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1) **a)** Dresser le tableau de variations de g.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

2) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la droite $D : y = \frac{x}{2}$ est une asymptote à C_f.

3) Montrer qu'il existe un point A, et un seul, de la courbe C_f où la tangente T est parallèle à D.

Préciser les coordonnées de A.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0,34 < \alpha < 0,35$.

5) Tracer C_f , D et T.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 + x\ln x & si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.

3) **a)** Soit la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = f(x) - x$.

b) Etudier le sens de variation de h.

c) En déduire la position de C_f par rapport à T.

4) Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

5) Construire T et C_f (unité graphique 2 cm).

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que le point I d'abscisse 2 est un point d'inflexion de C_f.

c) Ecrire une équation de la tangente T au point I

d) Tracer T et C_f.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1\,,+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en 0.

c) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

Exercice 14

I/ Le tableau ci-dessous représente les variations d'une fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		
$g(x)$	↘	

1) Compléter le tableau de variation de g.

2) Calculer $g(1)$ et déterminer le signe de $g(x)$.

II/ On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$f(x) = -x + \frac{\ln x}{x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que C_f admet une asymptote oblique $\Delta : y = -x$ au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position relative de C_f et Δ.

3) Tracer Δ et C_f.

Exercice 15

A) Soit φ la fonction définie sur $]1\,,+\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$.

1) a) Montrer que φ est dérivable sur $]1\,,+\infty[$ et que $\forall x \in]1\,,+\infty[$; $\varphi'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de φ et en déduire que $\forall x \in]1\,,+\infty[$; $\varphi(x) > 0$.

B) Soit f la fonction définie sur $]1\,,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x-1)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]1\,,+\infty[$ et que $\forall x \in]1\,,+\infty[$: $f'(x) = \varphi(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point $I(2\,,0)$ est un point d'inflexion de C_f.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à C_f au point I.

c) Déterminer l'intersection de C_f avec la droite D : $y = x$ et étudier les positions relatives de C_f et D.

d) Construire C_f (on précisera la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$)

3) a) Montrer que f est une bijection de $]1\,,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f^{-1} la fonction réciproque de f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(1+e)$.

c) Tracer dans le même repère la courbe C' représentative de f^{-1}.

4) Soit h la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $h(x) = x^2\ln(x-1)$.

a) Calculer $h'(x)$ pour $x > 1$.

b) Vérifier que $\forall x > 1$; $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$ c) Déduire alors une primitive de f sur $]1,+\infty[$.

Exercice 16

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$; $g(x) > 0$

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - (\ln x)^2$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f ; montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) a) Montrer que la droite $D : y = 2x$ est tangente à C_f au point d'abscisse 1.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$ et interpréter le résultat graphiquement.

c) Etudier la position relative de C_f et D.

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

b) Vérifier que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$

c) Tracer C_f et D.