Fonctions circulaires 3ème Sc Techniques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{6x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)+\sin x}{3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(3x)}{1-\cos x}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{x-\frac{\pi}{2}}$ 6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\sin x - \sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$ 8) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos x}{x+\frac{\pi}{4}}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$ 10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x\sqrt{\sin^2 x}}{x}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2\sin(2\pi x)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) **Montrer que la période de f est 1.**

   b) **Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de C_f.**

   c) **Montrer que la droite $D : x = \frac{1}{4}$ est axe de symétrie de C_f.**

2) **Justifier que l'on peut étudier f sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.**

3) **Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.**

4) **Tracer C_f sur l'intervalle $\left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.**

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **Déterminer la période de f et déduire que $[0, \pi]$ est un domaine d'étude de f.**

2) a) **Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.**

   b) **Tracer C_f sur l'intervalle $[0, \pi]$.**

3) a) **Montrer que la droite $D : x = \frac{\pi}{12}$ est axe de symétrie de C_f.**

   b) **Montrer que le point $A\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ est un centre de symétrie de C_f.**

4) **Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{12}$.**

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$ et soit C_f sa courbe.

1) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,,\pi]$.

2) Déterminer les points d'intersection de C_f est l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,,\pi]$.

3) Tracer C_f sur l'intervalle $[-\pi\,,\pi]$.

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = x\,\sin x + \cos x - 1$

1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire le signe $g(x)$ de pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} f(x) = 2\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0, préciser $f'(0)$ et écrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

c) Etudier la parité de f.

3) a) Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\}$ on a : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer C_f (unité graphique 3 cm)

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\sin(2x) + b(1-\cos(2x))$ où a et b deux réels. La fonction f admet un extremum au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$ et le point $A\left(\frac{2\pi}{3}\,,-3\right) \in C_f$ courbe représentative de f.

1) a) Montrer que $a = \sqrt{3}$ et $b = -1$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

2) Montrer que f est périodique de période π.

3) a) Calculer $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,,\pi]$.

4) Tracer la partie de C_f pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,2\pi\right]$.

5) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

a) **Montrer que la fonction g est paire.**

b) **Explique comment déduire le traçage de C_g courbe représentative de g à partir de C_f et tracer C_g.**

Exercice 7

Le graphique C_f représenté ci-dessous sur l'intervalle $[0\,,\pi]$ est celui d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = a\cos 2x + b\cos x$ **avec** $a \in \mathbb{R}$ **et** $b \in \mathbb{R}$.

1) **Par lecture graphique, montrer que $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$.**

3) **Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{2\pi}{3}$ Tracer T.**

2) **Compléter la construction de C_f sur $[-2\pi\,,2\pi]$; expliquer.**

3) **Soit g la fonction définie sur $]-\pi\,,\pi[$ par** $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)+1}{\sin x} & si\ \ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

4) **Montrer que g est continue et dérivable en 0.**