

Fonctions circulaires 3^{ème} Sc Techniques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{6x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + \sin x}{3x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{1 - \cos x}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$
7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$ 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$ 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ 10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$ 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sqrt{\sin^2 x}}{x}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -2 \sin(2\pi x)$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que la période de f est 1.
b) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de C_f .
c) Montrer que la droite $D : x = \frac{1}{4}$ est axe de symétrie de C_f .
- 2) Justifier que l'on peut étudier f sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
- 4) Tracer C_f sur l'intervalle $\left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Déterminer la période de f et déduire que $[0, \pi]$ est un domaine d'étude de f .
- 2) a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
b) Tracer C_f sur l'intervalle $[0, \pi]$.
- 3) a) Montrer que la droite $D : x = \frac{\pi}{12}$ est axe de symétrie de C_f .
b) Montrer que le point $A\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ est un centre de symétrie de C_f .
- 4) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$ et soit C_f sa courbe.

- 1) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
- 2) Déterminer les points d'intersection de C_f est l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0, \pi]$.
- 3) Tracer C_f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = x \sin x + \cos x - 1$

- 1) a) Dresser le tableau de variation de g .
 b) En déduire le signe $g(x)$ de pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- 2) Soit la fonction f définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $\begin{cases} f(x) = 2 \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.
 - a) Montrer que f est continue en 0.
 - b) Montrer que f est dérivable en 0, préciser $f'(0)$ et écrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.
 - c) Etudier la parité de f .
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ on a : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$
 b) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Tracer C_f (unité graphique 3 cm)

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a \sin(2x) + b(1 - \cos(2x))$ où a et b deux réels. La fonction f admet un extremum au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$ et le point $A\left(\frac{2\pi}{3}, -3\right) \in C_f$ courbe représentative de f .

- 1) a) Montrer que $a = \sqrt{3}$ et $b = -1$
 b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.
- 2) Montrer que f est périodique de période π .
- 3) a) Calculer $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x)$.
 b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
- 4) Tracer la partie de C_f pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.
- 5) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2 \cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

a) Montrer que la fonction g est paire.

b) Explique comment déduire le traçage de C_g courbe représentative de g à partir de C_f et tracer C_g .

Exercice 7

Le graphique C_f représenté ci-dessous sur l'intervalle $[0, \pi]$ est celui d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = a \cos 2x + b \cos x \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

- 1) Par lecture graphique, montrer que $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$.
- 2) Compléter la construction de C_f sur $[-2\pi, 2\pi]$; expliquer.
- 3) Soit g la fonction définie sur $]-\pi, \pi[$ par
$$\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)+1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
- 4) Montrer que g est continue et dérivable en 0.

