

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[; f'(x) = \frac{-10x}{(x^2+1)^2}$
- 2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ et préciser le nombre dérivé de f à droite en 0.
- 3) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-1, 4]$.
- 4) Soit f^{-1} la réciproque de f .
 - a) Donner le tableau de variation de f^{-1}
 - b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.
 - c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 4[$ on précisera la dérivabilité de f^{-1} à gauche en 4
 - d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-1, 4]$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 - \sqrt{x^2 + 1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Dresser le tableau de variations de f .
- 2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.
 - a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α .
 - b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1,5$.
- 3) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.
 - a) Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 2]$.
 - c) Montrer que la fonction h^{-1} réciproque de h est continue sur $]-\infty, 2]$ et préciser son sens de variation sur $]-\infty, 2]$.
- 4) a) Montrer que h^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 2[$.
 - b) Montrer que h^{-1} n'est pas dérivable en 2.
 - c) Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-\infty, 2[$.

Exercice 3

- 1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter les résultats graphiquement.
 - b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{-1}{2x^2 \sqrt{\frac{x+1}{x}}}$
 - c) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- 2) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$
 - a) Dresser le tableau de variation de g .

- b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$.
- 3) a) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- b) En déduire que $\forall x \in [1, +\infty[$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x^2 + x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$
- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu
 - Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
 - En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) > 0$.
- Dresser le tableau de variation de f
 - Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]0, 1[$
- Soit f^{-1} la réciproque de f .
 - Donner le sens de variation de f^{-1}
 - Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur $[-1, +\infty[$

Exercice 5

Le graphique ci-contre est celui d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $[-2, 4]$.

T_1 est la demi-tangente au point d'abscisse 1.

T_2 est la tangente au point de coordonnées $(2, -1)$.

T_3 est la tangente au point de coordonnées $(4, -2)$.

- 1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant

a) $f'_d(-2) = -2$; $f'_g(4) = 2$; $f'(2) = 0$

b) La fonction f réalise une bijection de $[-2, 4]$ sur l'intervalle $[-2, 3]$.

- Justifier que la fonction réciproque f^{-1} de f n'est pas dérivable au point -1 .
- Calculer $(f^{-1})'_d(3)$ et $(f^{-1})'_g(-2)$.
- Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1} .

Exercice 6

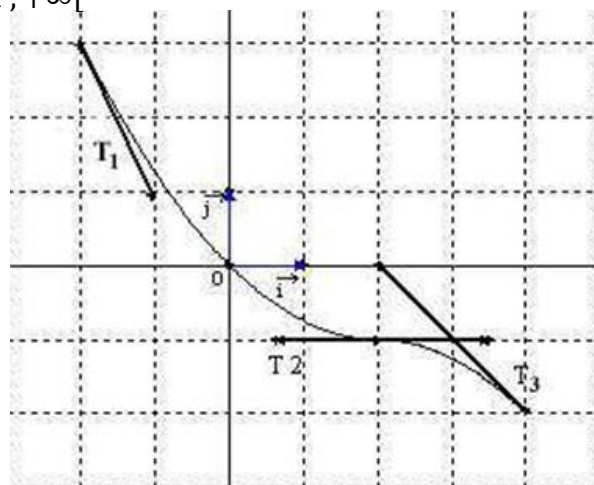
Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

- 3) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.



- 4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $] -1, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1,5$
- 5) a) Montrer que f réalise une bijection de $] -1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J
- c) Calculer en fonction de α ; $(f^{-1})'(\alpha)$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x}{2x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) a) Etudier la continuité de f en 0.
- b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le résultat graphiquement.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.
- 3) a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$
- b) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty, 0[$.
- a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 8

Pour chaque question indiquer la réponse exacte.

- 1) Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ la bijection de $]2, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$

a) $(f^{-1})'(y) = \frac{-2y^2}{1-y^2}$

b) $(f^{-1})'(y) = \frac{2y^2}{1-y^2}$

c) $(f^{-1})'(y) = \frac{-2y^2}{y^2-1}$

- 2) La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

a) $(f^{-1})'(2) = -2$

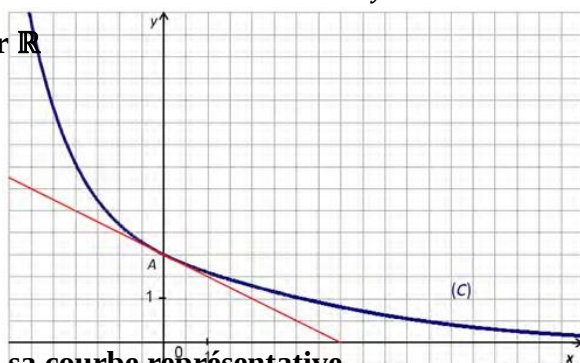
b) $(f^{-1})'(2) = -\frac{1}{2}$

c) $(f^{-1})'(2) = 2$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \frac{2+\sqrt{1-x^2}}{x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.
- 2) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2]$
- c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.



Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

- 1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1, +\infty[$
b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1}
c) Calculer $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(\sqrt{2})$.
- 3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$
b) Calculer $(f^{-1})'(2)$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.
- 4) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} + 2$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement
b) Montrer que la droite $\Delta: y = 2x + 2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$
c) Etudier la position relative de C_f et Δ .
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$
b) Dresser le tableau de variation de f
c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $-1 < \alpha < 0$
d) Tracer C_f et Δ .
- 3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition
a) Dresser le tableau de variation de f^{-1}
b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 2[$
c) Tracer $C_{f^{-1}}$ courbe représentative de f^{-1}

Exercice 12

A) Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1$. On désigne par C_f .

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat graphiquement.
- 2) a) Etudier la dérivabilité f est à droite en 1. Interpréter le résultat graphiquement.
b) Justifier que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.
c) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, 2[$.
b) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 1.
- 4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1, 2[$.

B) Soit la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\cos x}\right)} & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \frac{1}{1+\sin x}$

2) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et que $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{2x-1}}$.