Fonctions réciproques 4ème Sc Techniques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{-10x}{(x^2+1)^2}$

2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ et préciser le nombre dérivé de f à droite en 0.

3) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-1, 4]$.

4) Soit f^{-1} la réciproque de f.

   a) Donner le tableau de variation de f^{-1}

   b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

   c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 4[$ on précisera la dérivabilité de f^{-1} à gauche en 4

   d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-1, 4]$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 - \sqrt{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.

   a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

   b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1{,}5$.

3) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.

   a) Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 2]$.

   c) Montrer que la fonction h^{-1} réciproque de h est continue sur $]-\infty, 2]$ et préciser son sens de variation sur $]-\infty, 2]$.

4) a) Montrer que h^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 2[$.

   b) Montrer que h^{-1} n'est pas dérivable en 2.

   c) Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-\infty, 2[$.

Exercice 3

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

   a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter les résultats graphiquement.

   b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$

   c) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

2) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0\,,+\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$.

3) a) Montrer que $\forall x \in [1\,,+\infty[$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) En déduire que $\forall x \in [1\,,+\infty[$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x^2 + x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que f est continue sur $[0\,,+\infty[$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

b) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in\,]0\,,+\infty[\,;\, f'(x) > 0$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f est une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur $[-1\,,+\infty[$.

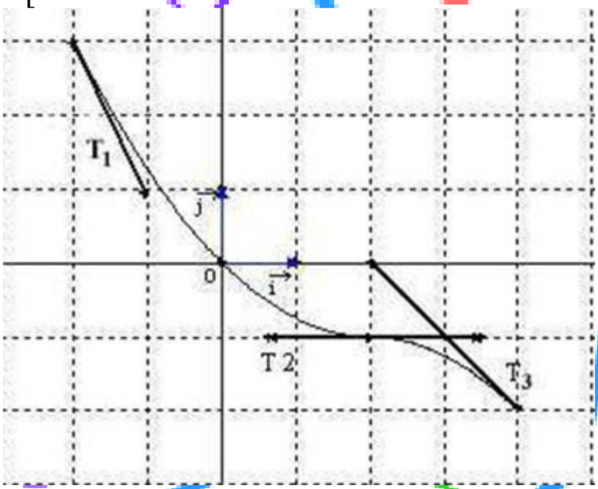
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0\,,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in\,]0\,,1[$

5) Soit f^{-1} la réciproque de f.

a) Donner le sens de variation de f^{-1}

b) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur $[-1\,,+\infty[$

Exercice 5



Le graphique ci-contre est celui d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $[-2\,,4]$.

T_1 est la demi-tangente au point d'abscisse 1.

T_2 est la tangente au point de coordonnées $(2\,,-1)$.

T_3 est la tangente au point de coordonnées $(4\,,-2)$.

1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant

a) $f'_d(-2) = -2$; $f'_g(4) = 2$; $f'(2) = 0$

b) La fonction f réalise une bijection de $[-2\,,4]$ sur l'intervalle $[-2\,,3]$.

2) Justifier que la fonction réciproque f^{-1} de f n'est pas dérivable au point -1.

3) Calculer $(f^{-1})'_d(3)$ et $(f^{-1})'_g(-2)$.

4) Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1}.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1\,,+\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1{,}5$

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J

c) Calculer en fonction de α ; $(f^{-1})'(\alpha)$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{-x}{2x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$

b) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,,0[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

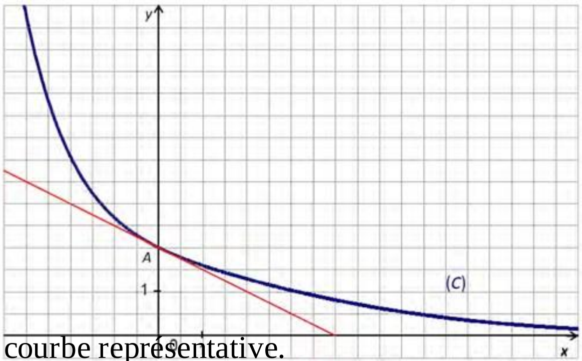
Exercice 8

Pour chaque question indiquer la réponse exacte.

1) Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ la bijection de $]2\,,+\infty[$ sur $]1\,,+\infty[$

a) $(f^{-1})(y) = \frac{-2y^2}{1-y^2}$ b) $(f^{-1})(y) = \frac{2y^2}{1-y^2}$ c) $(f^{-1})(y) = \frac{-2y^2}{y^2-1}$

2) La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



a) $(f^{-1})'(2) = -2$

b) $(f^{-1})'(2) = -\frac{1}{2}$

c) $(f^{-1})'(2) = 2$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $]0\,,1]$ par $f(x) = \frac{2+\sqrt{1-x^2}}{x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,1[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,,1[$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0\,,2]$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1\,,+\infty[$

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1}

c)) Calculer $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(\sqrt{2})$.

3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1\,,+\infty[$

b) Calculer $(f^{-1})'(2)$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.

4) Montrer que pour tout $x \in\,]1\,,+\infty[$ on a $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2+1} + 2$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement

b) Montrer que la droite Δ: $y = 2x + 2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$

c) Etudier la position relative de C_f et Δ:

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $-1 < \alpha < 0$

d) Tracer C_f et Δ:

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition

a) Dresser le tableau de variation de f^{-1}

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in\,]-\infty\,,2[$

c) Tracer $C_{f^{-1}}$ courbe représentative de f^{-1}

Exercice 12

A) Soit la fonction f définie sur $[\,1\,,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1$. On désigne par C_f .

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Etudier la dérivabilité f est à droite en 1. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Justifier que f est dérivable sur $]1\,,+\infty[$ et que pour tout $\in\,]1\,,+\infty[\,,\ f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[\,1\,,+\infty[$ sur $[\,1\,,2[$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 1.

4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $\in [\,1\,,2[$.

B) Soit la fonction g définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{\cos x}\right)} & si\ x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $\in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right],\ g(x) = \frac{1}{1+\sin x}$

2) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\left[\frac{1}{2}\,,1\right]$.

3) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}\,,1\right]$ et que $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{2x-1}}$.