

Fonction logarithme népérien 4ème Sc Expérimentales

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

b) Déterminer le domaine de définition de f .

c) Montrer que la fonction f est impaire.

2) a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a : $f(x) = \ln x + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter les résultats graphiquement.

3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Tracer la courbe C_f .

4) a) Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $g'(x) = -4x \ln x$.

b) Dresser le tableau de variation de g .

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α .

b) Vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$.

c) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

5) a) Etudier les variations de f .

b) Tracer la courbe C_f de f .

Exercice 3

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte.

- 1) La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x$ est :
 - a) croissante sur $]0, +\infty[$
 - b) décroissante sur $]0, +\infty[$
 - c) n'est pas monotone sur $]0, +\infty[$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - 1}$ est égale à :
 - a) 0
 - b) 2
 - c) 1
- 3) Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ est :
 - a) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$
 - b) $\ln(x^2 + 1)$
 - c) $2 \ln(x^2 + 1)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{\ln(2x+4)}{2x+3}$ est égale à :
 - a) 0
 - b) 1
 - c) $+\infty$
 - d) -1
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ est égale à :
 - a) $+\infty$
 - b) 1
 - c) $-\infty$
 - d) -1

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x \ln x - x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0
 - b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
- 2) a) Dresser le tableau de variation de f
 - b) Etudier la branche infinie de C_f .
 - c) Construire la courbe C_f .
- 3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en -1
- 4) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.
- 5) a) Calculer $\int_1^e x \ln x \, dx$
 - b) En déduire l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 5

- 1) On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
 - a) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 2) Vérifier que pour tout $x \in]1, +\infty[$; $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

- a) Dresser le tableau de variation de f .
- b) Montrer que la restriction de f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $[e, +\infty[$ on note f^{-1} sa réciproque.
- 3) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} dans le même repère.
- 4) On définit la suite (U_n) par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$
- a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq e$
- b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
- c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 5) a) Montrer que pour tout $x \geq e$; $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)^2$
- b) En déduire que pour tout $x \geq e$; $f'(x) \leq \frac{1}{4}$
- 6) a) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |U_n - e|$
- b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$
- c) Retrouver ainsi la limite de la suite (U_n) .

Exercice 6

A) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^4 - 1 + 3 \ln x$

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- b) Dresser le tableau de variation de g
- c) Calculer $g(1)$
- 2) En déduire que : si $0 < x < 1$ alors $g(x) < 0$ et si $x > 1$ alors $g(x) > 0$

B) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x^3}$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^4}$
- b) Dresser le tableau de variation de f
- 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, 1[$ une unique solution α et que $0,5 < \alpha < 0,6$
- b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, 1[$ une unique solution β et que $3 < \beta < 3,1$
- 4) On désigne par (C) la courbe représentative de f (unité graphique 2 cm)
- a) Montrer que la droite $D: y = x - 3$ est une asymptote à (C)
- b) Etudier la position de (C) par rapport à D
- c) Tracer (C) et D
- 5) Soit G la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $G(x) = \frac{1+2 \ln x}{4x^2}$
- a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[; G'(x) = -\frac{\ln x}{x^3}$

b) Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) la droite D et les droites $x = \alpha$ et $x = 1$

Montrer que $A(\alpha) = \frac{-2\alpha^4 + 6\alpha^3 + \alpha^2 - 1}{\alpha^2} \text{ cm}^2$

Exercice 7

A) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(1 + 2x)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f .

b) Etudier les variations de f .

2) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a : $f(x) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{x} + 2\right)$

3) Soit g la fonction définie $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ sur par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ exactement deux solutions 0 et α et que $1 < \alpha < 2$

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

c) Etudier les positions relatives de C_f et la droite $\Delta : y = x$.

4) a) Etudier la branche infinie de C_f .

b) Tracer C_f et Δ .

5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe $C_{f^{-1}}$ représentative de f^{-1} dans le même repère.

6) Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations :

$x = 0$ et $x = \alpha$ Montrer que $A(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$.

B) Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq \alpha$.

2) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 8

Soit la suite (I_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite (I_n) est à termes positifs.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; calculer la dérivée de la fonction $g(x) = (\tan x)^{n+1}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 9

1) Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $g(x) = -\frac{x+2}{x+1} + \ln(x+1)$

- Dresser le tableau de variation de g
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-1, +\infty[$ une unique solution α
- Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-1, +\infty[$

2) Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = -2x + x \ln(x+1)$ et soit C_f sa courbe représentative

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

interpréter le résultat graphiquement

- Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[; f'(x) = g(x)$
- Dresser le tableau de variation de f

3) Dans la figure ci-contre, on a tracé la courbe C_h de la fonction h définie sur $]-1, +\infty[$

par $h(x) = \frac{-x^2}{x+1}$ la droite $\Delta: x = -1$

et on a placé le réel α

a) Vérifier que $\ln(\alpha + 1) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$

et en déduire que $f(\alpha) = g(\alpha)$

b) Construire le point P

d'abscisse α de la courbe C_f

4) a) Déterminer les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses

b) Tracer C_f

5) a) Vérifier que pour tout $x > -1$ on a : $h(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1}$

b) Calculer $\int_0^\alpha h(x) dx$

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

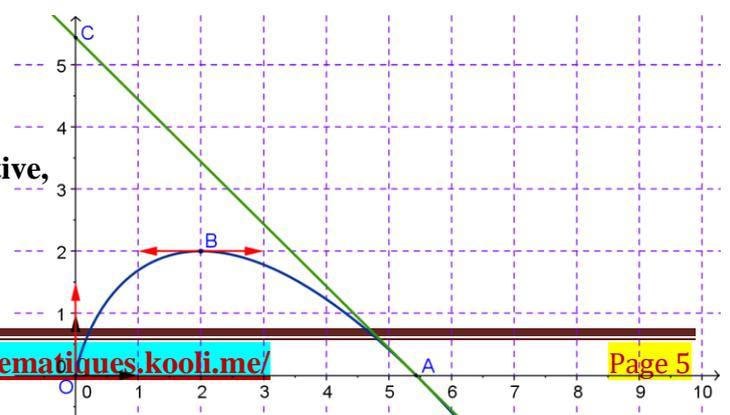
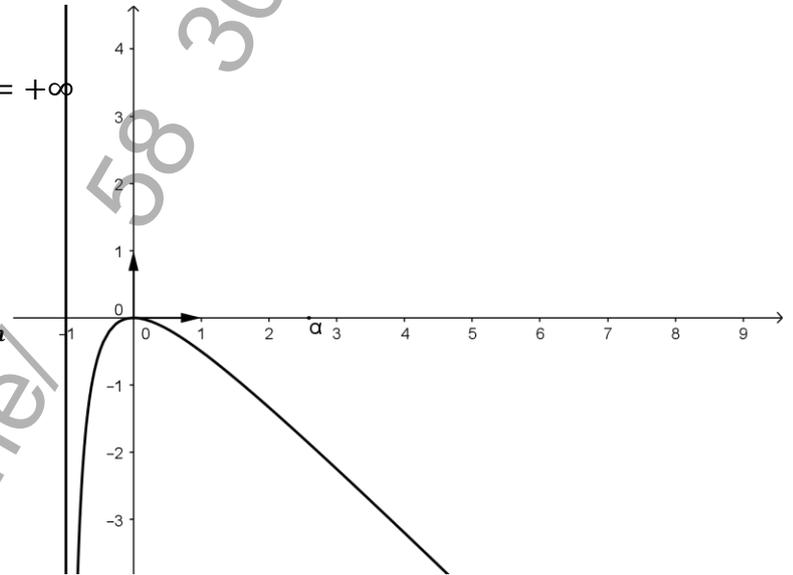
$$\int_0^\alpha x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(\alpha+1) + \frac{1}{2} \int_0^\alpha h(x) dx$$

d) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$

e) Montrer que $A = \frac{3\alpha^3 - \alpha^2 + 4}{4(\alpha+1)}$

Exercice 10

Dans le graphique ci-contre Γ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.



- *Les points O, A et B appartiennent à Γ .
- *La droite (AC) est la tangente à Γ au point A .
- * Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.
- * Γ admet une demi tangente verticale à droite en O .

1) Par une lecture graphique :

- a) Déterminer $f(0), f(2), f(2e), f'(2)$ et $f'(2e)$.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- c) Justifier que la restriction g de f à l'intervalle $[2, +\infty[$

admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser l'ensemble de définition de g^{-1} .

2) On admet que g est définie par $g(x) = x(1 + \ln 2 - \ln x)$, pour tout $x \geq 2$. On désigne par C_g la courbe représentative de g et par $C_{g^{-1}}$ celle de g^{-1} dans un repère orthonormé.

Tracer C_g et $C_{g^{-1}}$.

3) Soit D l'aire de la partie du plan limité par les axes (O, \vec{i}) et (O, \vec{j}) et les courbes C_g et $C_{g^{-1}}$.

- a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_2^{2e} g(x) dx = e^2 - 3$$

- b) Calculer l'aire D .

Exercice 11

1) Dans la figure ci-contre, C et Γ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé, des deux fonctions u et v définies sur \mathbb{R}_+ par $u(x) = -x^2 + x$ et $v(x) = x \ln x$ pour $x > 0$ et $v(0) = 0$

Par une lecture graphique

- a) Reconnaître la courbe de chacune des fonctions u et v .
- b) Donner le signe de $u(x) - v(x)$

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x \quad \text{si } x > 0$$

f est-elle dérivable à droite en 0 ?

3) a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$; $f'(x) = u(x) - v(x)$

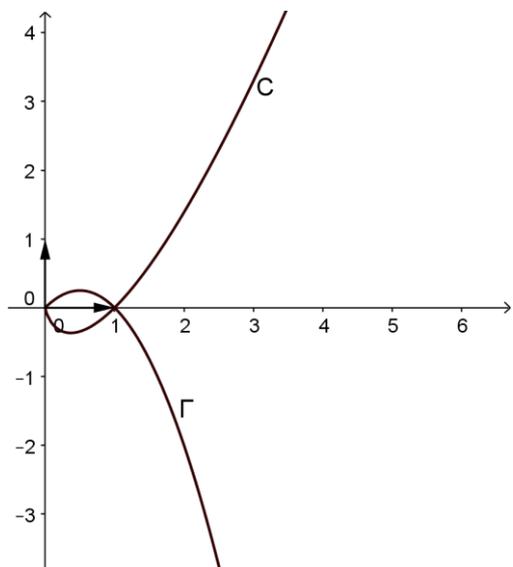
b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

4) On désigne par C_f la courbe représentative de f .

- a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que la courbe C_f coupe l'axe (O, \vec{i}) en un seul point autre que O .

Γ



On notera α l'abscisse de ce point. Vérifier que $1,5 < \alpha < 1,6$.

c) Tracer C_f (on précisera la demi-tangente à C_f au point O).

Exercice 12

A) Soit φ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$.

1) a) Montrer que φ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $\forall x \in]1, +\infty[; \varphi'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de φ et en déduire que $\forall x \in]1, +\infty[; \varphi(x) > 0$.

B) Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x-1)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $\forall x \in]1, +\infty[: f'(x) = \varphi(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que le point $I(2, 0)$ est un point d'inflexion de C_f .

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à C_f au point I .

c) Déterminer l'intersection de C_f avec la droite $D : y = x$ et étudier les positions relatives de C_f et D .

d) Construire C_f (on précisera la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$)

3) a) Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur \mathbb{R} .

b) Montrer que f^{-1} la fonction réciproque de f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $(f^{-1})'(1+e)$.

c) Tracer dans le même repère la courbe C' représentative de f^{-1} .

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$

a) Vérifier que $\forall x > 1 ; \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$

b) En déduire A .

Exercice 13

1) Soit a un réel strictement positif et x un réel de l'intervalle $[a, a+1]$.

a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a+1}$

b) En déduire que $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$ (1)

2) Soit (S_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

a) Montrer, en utilisant (1) que $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

3) On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2 ; U_n = S_n - \ln(n)$

a) Montrer que la suite (U_n) est minorée.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

Exercice 14

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$U_n = 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \geq 0$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$

2) Calculer U_0, U_1 et U_2

3) Montrer que (U_n) est décroissante

4) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

Exercice 15

On a représenté ci-contre la courbe C de la fonction logarithme népérien (« ln »).

1) Placer les points de la courbe C

d'abscisse e et \sqrt{e} .

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

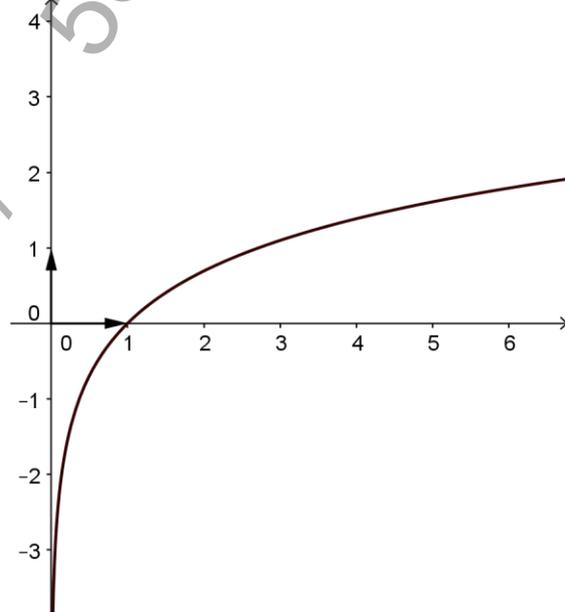
$$f(x) = \ln^2 x - \ln x + 1. \text{ On note } C_f$$

sa courbe représentative.

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.



Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que pour tout réel $x > 0, f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x}$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Etudier la position relative des courbes C_f et (C).

b) Tracer C_f .

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et soit C_f sa courbe représentative (unité graphique 2 cm)

1) a) Montrer que le domaine de définition de f est $] -1, 1[$

b) Montrer que f est dérivable sur $] -1, 1[$ et que pour tout $x \in] -1, 1[$ on a : $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$

c) Montrer que f est impaire

2) Dresser le tableau de variation de f

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe au point O.

4) a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t) \geq 2$

- b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente sur un intervalle convenablement choisi, montrer que pour tout $0 \leq x < 1$ on a : $f(x) \geq 2x$
- 5) Construire T et C_f ainsi que les asymptotes de C_f .
- 6) a) Soit $\alpha \in]0, 1[$, calculer en cm^2 , $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$; $x = \alpha$ et $y = 0$
- b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} A(\alpha)$.
- 7) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} .
- b) Construire la courbe C' représentative de f^{-1} .

Exercice 17

- 1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + 2 \ln x$
- a) Etudier le sens de variation de g
- b) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$
- c) En déduire que : si $0 < x < 1$ alors $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ et si $x > 1$ alors $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$
- 2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative (unité graphique 2cm)

- a) Montre que f est dérivable à droite en 0
- b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et vérifier que $\forall x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$
- 3) a) Vérifier que la demi tangente Δ à la courbe C_f au point O a pour équation : $\begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$
- b) Etudier la position de C_f par rapport à Δ .
- c) Tracer Δ et C_f dans le même repère.
- 4) Soit β un réel de l'intervalle $]0, 1[$
- a) Calculer en m^2 , l'aire $A(\beta)$ du domaine limité par la courbe C_f la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = \beta$ et $x = 1$
- b) Calculer $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta)$
- 5) On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $U_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = f(U_n)$
- a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < U_n < 1$
- b) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- c) En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 18

A) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

- 1) Etudier les variations de g .

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $0,27 < \alpha < 0,28$

3) Déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

B) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe représentative de f (unité graphique 4 cm)

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$

c) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Tracer la courbe C_f

4) Soit h la restriction de f à $[\alpha, +\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de $[\alpha, +\infty[$ sur $[-\alpha, +\infty[$

b) Montrer que h^{-1} la fonction réciproque de h est dérivable sur $[-\alpha, +\infty[$ et calculer $(h^{-1})'(0)$

c) Etudier la dérivabilité de h^{-1} à droite en $-\alpha$

5) Construire la courbe C' de h^{-1} dans le même repère.

Exercice 19

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \ln[x(2-x)]$ et soit C_f sa courbe représentative (u g 4 cm)

1) Montrer que $]0, 2[$ est le domaine de définition de f et dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de C_f

b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite (O, \vec{i}) . On notera x_0 la plus petite de ces abscisses

3) Soit φ la fonction définie sur $]0, 2[$ par : $\varphi(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction φ .

b) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans $]0, 2[$ exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée α .

c) Vérifier que $x_0 < \alpha < 0,3$ et que $\ln[\alpha(2-\alpha)] = \alpha - 1$

d) Donner le signe de $\varphi(x)$ et en déduire la position de la courbe C_f et la droite $\Delta: y = x$

4) Tracer C_f et Δ (on prendra $x_0 \simeq 0,2$)

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, 1]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in]0, 1]$

c) Tracer la courbe C' de g^{-1}

Exercice 20

On a représenté ci-dessous la courbe C_f de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{x^2 + x \ln x + x}{(x+1)^2} \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 0$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe (O, \vec{i}) autre que le point O .

1) a) Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$

b) Montrer que $\ln \alpha = -(\alpha + 1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x \ln x}{x+1} + 1$ et on désigne par C_g la courbe représentative de .

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

3) a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$, $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de g .

4) a) Montrer que $g(\alpha) = 1 - \alpha$.

b) Construire alors, sur l'annexe, le point de la courbe C_g d'abscisse α

c) Tracer la courbe C_g

5) On désigne par A l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par les courbes C_g et C_f et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que :

$$\int_{\alpha}^1 f(x) dx = -[xg(x)]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 g(x) dx$$

b) En déduire que $A = \alpha^2 - \alpha + 1$

