Fonction logarithme népérien 4ème Sc Expérimentales

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

   b) Déterminer le domaine de définition de f.

   c) Montrer que la fonction f est impaire.

2) a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a : $f(x) = \ln x + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter les résultats graphiquement.

3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

   b) Dresser le tableau de variations de f.

   c) Tracer la courbe C_f.

4) a) Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

   b) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $g'(x) = -4x \ln x$.

   b) Dresser le tableau de variation de g.

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α.

   b) Vérifier que $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$.

   c) Déduire le signe de g(x) sur $]0, +\infty[$.

4) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

   a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

   c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

5) a) Etudier les variations de f.

   b) Tracer la courbe C_f de f.

Exercice 3

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte.

1) La fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x$ est :

a) croissante sur $]0\,,+\infty[$ b) décroissante sur $]0\,,+\infty[$ c) n'est pas monotone sur $]0\,,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - 1}$ est égale à :

a) 0 b) 2 c) 1

3) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est :

a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ b) $\ln(x^2+1)$ c) $2\ln(x^2+1)$

4) $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{\ln(2x+4)}{2x+3}$ est égale à :

a) 0 b) 1 c) $+\infty$ d) -1

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ est égale à :

a) $+\infty$ b) 1 c) $-\infty$ d) -1

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - x & si\ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Etudier la branche infinie de C_f.

c) Construire la courbe C_f.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1\,,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en -1

4) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

5) a) Calculer $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

b) En déduire l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 5

1) On considère la fonction f définie sur $]1\,,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Vérifier que pour tout $x \in\,]1\,,+\infty[\,;\ f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la restriction de f réalise une bijection de $[e\,,+\infty[$ sur $[e\,,+\infty[$ on note f^{-1} sa fonction réciproque.

3) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} dans le même repère.

4) On définit la suite (U_n) par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq e$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) **a)** Montrer que pour tout $x \geq e$; $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)^2$

b) En déduire que pour tout $x \geq e$; $f'(x) \leq \frac{1}{4}$

6) **a)** Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissement finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$|U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|U_n - e|$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$

c) Retrouver ainsi la limite de la suite (U_n).

Exercice 6

A) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $g(x) = x^4 - 1 + 3\ln x$

1) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g

c) Calculer $g(1)$

2) En déduire que : si $0 < x < 1$ alors $g(x) < 0$ et si $x > 1$ alors $g(x) > 0$

B) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x^3}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) **a)** Montrer que $\forall x \in\,]0\,,+\infty[\;$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^4}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,,1[$ une unique solution α et que $0,5 < \alpha < 0,6$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,,1[$ une unique solution β et que $3 < \beta < 3,1$

4) On désigne par (C) la courbe représentative de f (unité graphique 2 cm)

a) Montrer que la droite $D: y = x - 3$ est une asymptote à (C)

b) Etudier la position de (C) par rapport à D

c) Tracer (C) et D

5) Soit G la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $G(x) = \frac{1+2\ln x}{4x^2}$

a) Montrer que $\forall x \in\,]0\,,+\infty[$; $G'(x) = -\frac{\ln x}{x^3}$

b) Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) la droite D et les droites $x = \alpha$ et $x = 1$

Montrer que $A(\alpha) = \frac{-2\alpha^4+6\alpha^3+\alpha^2-1}{\alpha^2}\ cm^2$

Exercice 7

A) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(1+2x)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** Déterminer le domaine de définition de f.

b) Etudier les variations de f.

2) Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$ on a : $f(x) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{x}+2\right)$

3) Soit g la fonction définie $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ exactement deux solutions 0 et α et que $1 < \alpha < 2$

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

c) Etudier les positions relatives de C_f et la droite $\Delta : y = x$.

4) **a)** Etudier la branche infinie de C_f.

b) Tracer C_f et Δ.

5) **a)** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe $C_{f^{-1}}$ représentative de f^{-1} dans le même repère.

6) Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \alpha$ Montrer que $A(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$.

B) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq \alpha$.

2) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 8

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n\, dx$$

1) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite (I_n) est à termes positifs.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

2) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$; calculer la dérivée de la fonction $g(x) = (\tan x)^{n+1}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 9

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

1) Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x) = -\frac{x+2}{x+1} + \ln(x+1)$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-1,+\infty[$ une unique solution α

c) Déterminer le singe de $g(x)$ sur $]-1,+\infty[$

2) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = -2x + x\ln(x+1)$ et soit C_f sa courbe représentative

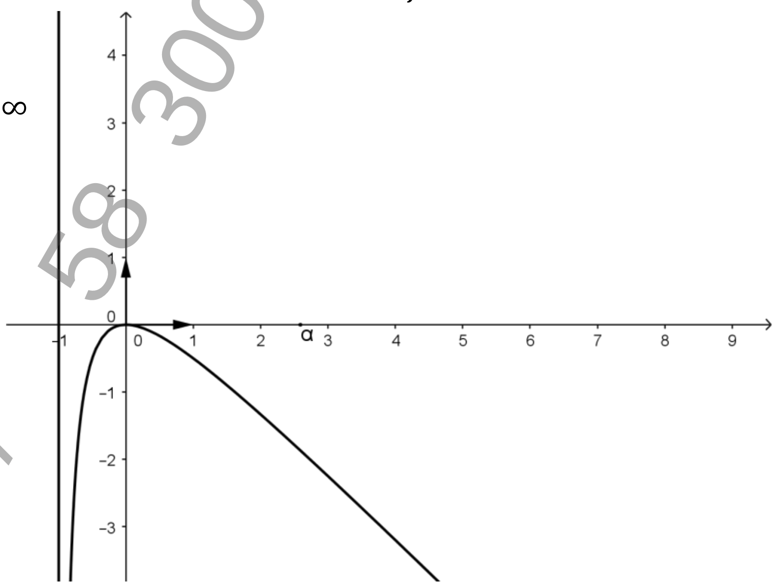
a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

interpréter le résultat graphiquement

b) Montrer que $\forall x \in]-1,+\infty[\,;\, f(x)' = g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f

3) Dans la figure ci-contre, on a tracé la courbe C_h de la fonction h définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x) = \frac{-x^2}{x+1}$ la droite $\Delta : x = -1$ et on a placé le réel α



a) Vérifier que $\ln(\alpha+1) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$ et en déduire que $f(\alpha) = g(\alpha)$

b) Construire le point P d'abscisse α de la courbe C_f

4) a) Déterminer les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses

b) Tracer C_f

5) a) Vérifier que pour tout $x > -1$ on a : $h(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1}$

b) Calculer $\int_0^{\alpha} h(x)\, dx$

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{\alpha} x\ln(1+x)\, dx = \frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) + \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} h(x)\, dx$$

d) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$

e) Montrer que $A = \frac{3\alpha^3 - \alpha^2 + 4}{4(\alpha+1)}$

Exercice 10

A) Soit φ la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$.

1) a) Montrer que φ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\forall x \in]1,+\infty[\,;\, \varphi'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

c) Dresser le tableau de variation de φ et en déduire que $\forall x \in]1,+\infty[$; $\varphi(x) > 0$.

B) Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x-1)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\forall x \in]1,+\infty[$: $f'(x) = \varphi(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point $I(2,0)$ est un point d'inflexion de C_f.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à C_f au point I.

c) Déterminer l'intersection de C_f avec la droite $D : y = x$ et étudier les positions relatives de C_f et D.

d) Construire C_f (on précisera la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$)

3) a) Montrer que f est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f^{-1} la fonction réciproque de f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(1+e)$.

c) Tracer dans le même repère la courbe C' représentative de f^{-1}.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$

a) Vérifier que $\forall x > 1$; $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$

b) En déduire A.

Exercice 11

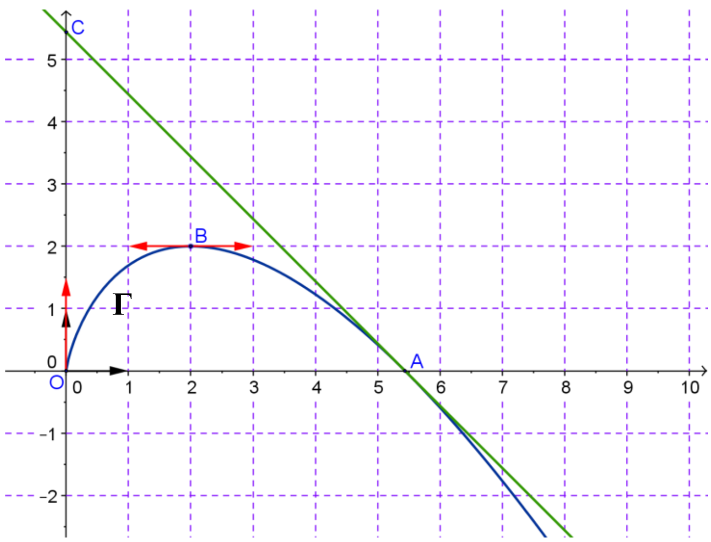
Dans le graphique ci-contre Γ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

*Les points O, A et B appartiennent à Γ.

*La droite (AC) est la tangente à Γ au point A.

* Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

* Γ admet une demi tangente verticale à droite en 0.



1) Par une lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$, $f(2)$, $f(2e)$, $f'(2)$ et $f'(2e)$.

b) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Justifier que la restriction g de f à l'intervalle $[2,+\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser l'ensemble de définition de g^{-1}.

2) On admet que g est définie par $g(x) = x(1+\ln 2 - \ln x)$, pour tout $x \geq 2$. On désigne par C_g la courbe représentative de g et par $C_{g^{-1}}$ celle de g^{-1} dans un repère orthonormé.

Tracer C_g et $C_{g^{-1}}$.

3) Soit D l'aire de la partie du plan limité par les axes $(O,\vec{\imath})$ et $(O,\vec{\jmath})$ et les courbes C_g et $C_{g^{-1}}$.

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

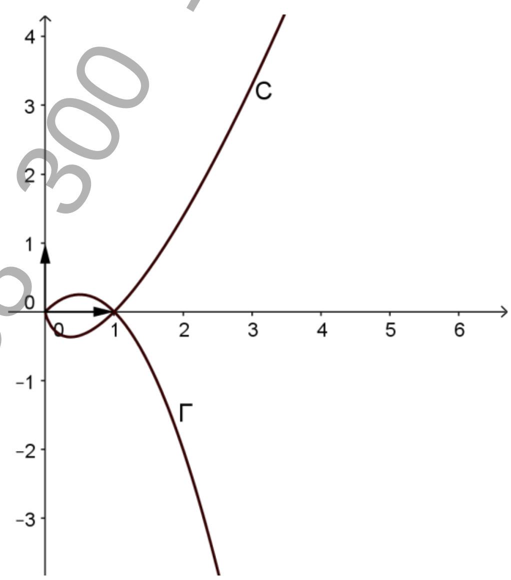
http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

$$\int_{2}^{2e} g(x)dx = e^2 - 3$$

b) Calculer l'aire D.

Exercice 12

1) Dans la figure ci-contre, C et Γ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé, des deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+$ par $u(x) = -x^2 + x$ et $v(x) = x\ln x$ pour $x > 0$ et $v(0) = 0$



Par une lecture graphique

a) Reconnaître la courbe de chacune des fonctions u et v.

b) Donner le signe de $u(x) - v(x)$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x \qquad \text{si} \quad x > 0$$

f est-elle dérivable à droite en 0 ?

3) a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$; $f'(x) = u(x) - v(x)$

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

4) On désigne par C_f la courbe représentative de .

a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que la courbe C_f coupe l'axe $(O, \vec{\imath})$ en un seul point autre que O.

On notera α l'abscisse de ce point. Vérifier que $1,5 < \alpha < 1,6$.

c) Tracer C_f (on précisera la demi-tangente à C_f au point O).

Exercice 13

1) Soit a un réel strictement positif et x un réel de l'intervalle $[a, a+1]$.

a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a+1}$

b) En déduire que $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$ (1)

2) Soit (S_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a) Montrer, en utilisant (1) que $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

3) On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$; $U_n = S_n - \ln(n)$

a) Montrer que la suite (U_n) est minorée.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

Exercice 14

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_n = 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx$$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n \geq 0$.

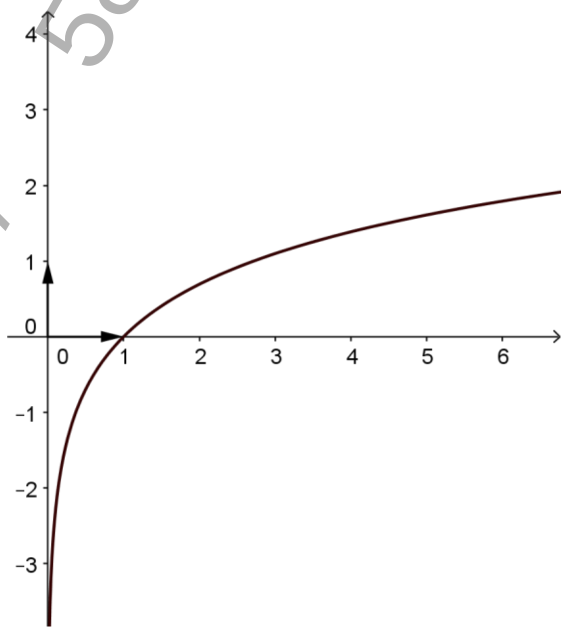
b) Montrer que $\forall n \in \mathrm{IN}\ ;\ U_{n+1} + U_n = \dfrac{1}{n+1}$

2) Calculer U_0 , U_1 et U_2

3) Montrer que (U_n) est décroissante

4) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

Exercice 15



On a représenté ci-contre la courbe C de la fonction logarithme népérien (« ln »).

1) Placer les points de la courbe C d'abscisse e et $\sqrt{e}$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln^2 x - \ln x + 1$. On note C_f sa courbe représentative.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Etudier la position relative des courbes C_f et (C).

b) Tracer C_f.

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et soit C_f sa courbe représentative (unité graphique 2 cm)

1) a) Montrer que le domaine de définition de f est $]-1\,,1[$

b) Montrer que f est dérivable sur $]-1\,,1[$ et que pour tout $x \in\ ]-1\,,1[$ on a : $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$

c) Montrer que f est impaire

2) Dresser le tableau de variation de f

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe au point O.

4) a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t) \geq 2$

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente sur un intervalle convenablement choisi, montrer que pour tout $0 \leq x < 1$ on a : $f(x) \geq 2x$

5) Construire T et C_f ainsi que les asymptotes de C_f.

6) a) Soit $\in]0,1[$, calculer en cm^2, $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$; $x = \alpha$ et $y = 0$

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 1^-} A(\alpha)$.

7) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Construire la courbe C' représentative de f^{-1}.

Exercice 17

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + 2\ln x$

a) Etudier le sens de variation de g

b) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(1)$ sur $]0,+\infty[$

c) En déduire que : si $0 < x < 1$ alors $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ et si $x > 1$ alors $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2\ln x & si\ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative (unité graphique 2cm)

a) Montre que f est dérivable à droite en 0

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et vérifier que $\forall x \in]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$

3) a) Vérifier que la demi tangente Δ à la courbe C_f au point O a pour équation : $\begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$

b) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

c) Tracer Δ et C_f dans le même repère.

4) Soit β un réel de l'intervalle $]0,1[$

a) Calculer en m^2 , l'aire $A(\beta)$ du domaine limité par la courbe C_f la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = \beta$ et $x = 1$

b) Calculer $\lim\limits_{\beta \to +\infty} A(\beta)$

5) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $U_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 18

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

1) Etudier les variations de g.

58 300 174 http://mathematiques.kooli.me/

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0\,,+\infty[$ une unique solution α et que $0,27 < \alpha < 0,28$

3) Déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

B) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f (unité graphique 4 cm)

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que $\forall x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$

c) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Tracer la courbe C_f

4) Soit h la restriction de f à $[\alpha\,,+\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de $[\alpha\,,+\infty[$ sur $[-\alpha\,,+\infty[$

b) Montrer que h^{-1} la fonction réciproque de h est dérivable sur $[-\alpha\,,+\infty[$ et calculer $(h^{-1})'(0)$

c) Etudier la dérivabilité de h^{-1} à droite en $-\alpha$

5) Construire la courbe C' de h^{-1} dans le même repère.

Exercice 19

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \ln[x(2-x)]$ et soit C_f sa courbe représentative (u g 4 cm)

1) Montrer que $]0\,,2[$ est le domaine de définition de f et dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de C_f

b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite $(O\,,\vec{\imath}\,)$.On notera x_0 la plus petite de ces abscisses

3) Soit φ la fonction définie sur $]0\,,2[$ par : $\varphi(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction φ.

b) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans $]0\,,2[$ exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée α.

c) Vérifier que $x_0 < \alpha < 0,3$ et que $\ln[\alpha(2-\alpha)] = \alpha - 1$

d) Donner le signe de $\varphi(x)$ et en déduire la position de la courbe C_f et la droite Δ: $y = x$

4) Tracer C_f et Δ (on prendra $x_0 \simeq 0,2$)

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0\,,1]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in\,]0\,,1]$

c) Tracer la courbe C' de g^{-1}

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

Exercice 20

On a représenté ci-dessous la courbe C_f de la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{x^2 + x\ln x + x}{(x+1)^2} \qquad \text{pour} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe $(O\,,\vec{\imath}\,)$ autre que le point O.

1) a) Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$

b) Montrer que $\ln\alpha = -(\alpha+1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha\,,+\infty[$ par $g(x) = \frac{x\ln x}{x+1} + 1$ et on désigne par C_g la courbe représentative de .

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

3) a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha\,,+\infty[\,,\ g'(x) = -\frac{f(x)}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de g.

4) a) Montrer que $g(\alpha) = 1 - \alpha$.

b) Construire alors, sur l'annexe, le point de la courbe C_g d'abscisse α

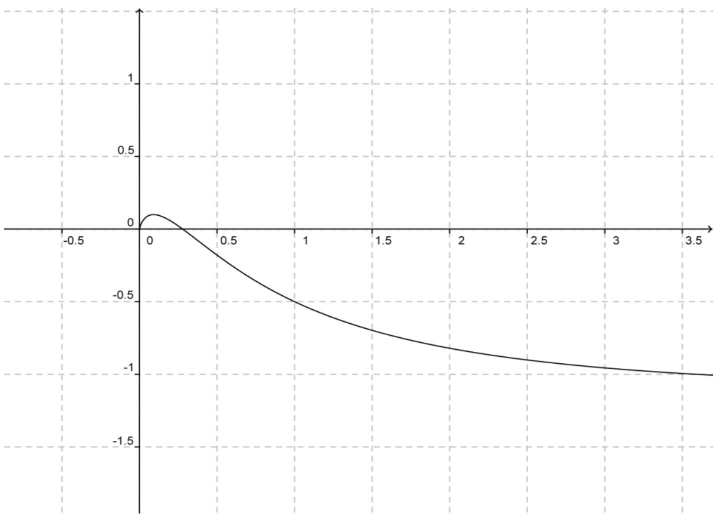
c) Tracer la courbe C_g

5) On désigne par A l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limité par les courbes C_g et C_f et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que :

$$\int_\alpha^1 f(x)\,dx = -[xg(x)]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 g(x)\,dx$$

b) En déduire que $A = \alpha^2 - \alpha + 1$



http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174