

## Fonction logarithme népérien 4ème Mathématiques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $\begin{cases} f(x) = x \ln x - x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0  
b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
- 2) a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
b) Etudier la branche infinie de  $C_f$ .  
c) Déterminer le point I intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses autre que O.  
d) Construire la courbe  $C_f$ .
- 3) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1, +\infty[$ .  
a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.  
b) Etudier la dérivabilité de  $g^{-1}$  à droite en  $-1$
- 4) Tracer la courbe de  $g^{-1}$  dans le même repère.
- 5) a) Calculer  $\int_1^e x \ln x \, dx$   
b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

### Exercice 2

On considère la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n \, dx$

- 1) A l'aide d'une intégration par parties calculer  $I_1$ .
- 2) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n \geq 0$   
b) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante, en déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.
- 3) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$ .  
b) Calculer  $I_2$  et  $I_3$ .

4) Calculer  $\int_1^e x(1 + \ln x)^3 dx$ .

### Exercice 3

On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_n = 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$

1) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \geq 0$ .

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$

2) Calculer  $U_0, U_1$  et  $U_2$

3) Montrer que  $(U_n)$  est décroissante.

4) En déduire que  $(U_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 4

On pose pour tout  $x \in ]-1, +\infty[ ; A = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$  et  $B = \int_0^1 \ln(x+1) dx$ .

1) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  on a :  $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$

b) En déduire que  $A = 1 - \ln 2$ .

c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $B$ .

2) Pour tout entier naturel  $n$  non nul on pose :  $I_n = \int_0^1 \ln(x+1) + \frac{2x^n}{1+x} dx$ .

a) Donner la valeur de  $I_1$ .

b) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $I_n \geq 0$ .

c) En déduire que la suite réelle  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite convergente.

3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$  et en déduire la limite de  $I_n$ .

### Exercice 5

A) Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \ln(1+2x)$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

b) Etudier les variations de  $f$ .

2) Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[$  on a :  $f(x) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{x} + 2\right)$

3) Soit  $g$  la fonction définie  $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$  sur par :  $g(x) = f(x) - x$ .

a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$  exactement deux solutions  $0$  et  $\alpha$  et que  $1 < \alpha < 1,5$

b) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .

- c) Etudier les positions relatives de  $C_f$  et la droite  $\Delta : y = x$ .
- 4) a) Etudier la branche infinie de  $C_f$ .  
b) Tracer  $C_f$  et  $\Delta$ .
- 5) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.  
b) Construire la courbe  $C_{f^{-1}}$  représentative de  $f^{-1}$  dans le même repère.
- 6) Soit  $A(\alpha)$  l'aire de la partie du plan limitée par les courbes  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  et les droites d'équations :  
 $x = 0$  et  $x = \alpha$  Montrer que  $A(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$ .
- B) Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = f(U_n) ; \forall n \in \mathbb{N}$ .
- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $1 \leq U_n \leq \alpha$ .  
2) Montrer que la suite  $(U_n)$  est strictement croissante.  
3) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et calculer sa limite.

### Exercice 6

Soit la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$

- 1) a) Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .  
b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $U_n + U_{n+2} = \frac{1}{n+1}$   
c) Calculer  $U_3$  et  $U_4$
- 2) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $U_n \geq 0$   
b) Montrer que la suite  $U$  est décroissante.  
c) Montrer que la suite  $U$  est convergente et calculer sa limite.
- 3) a) Montrer que pour tout  $n \geq 2$  et  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  on a :  $(\tan x)^n \leq \frac{\sin x}{(\cos x)^n}$   
b) En déduire que pour tout  $n \geq 2$  on a :  $U_n \leq \frac{1}{n+1} \left( (\sqrt{2})^{n-1} - 1 \right)$

### Exercice 7

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ .

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .
- 2) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[ ; g'(x) = -4x \ln x$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 3) a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .  
b) Vérifier que  $1,8 < \alpha < 1,9$ .  
c) Déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 4) On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$
- a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  
b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

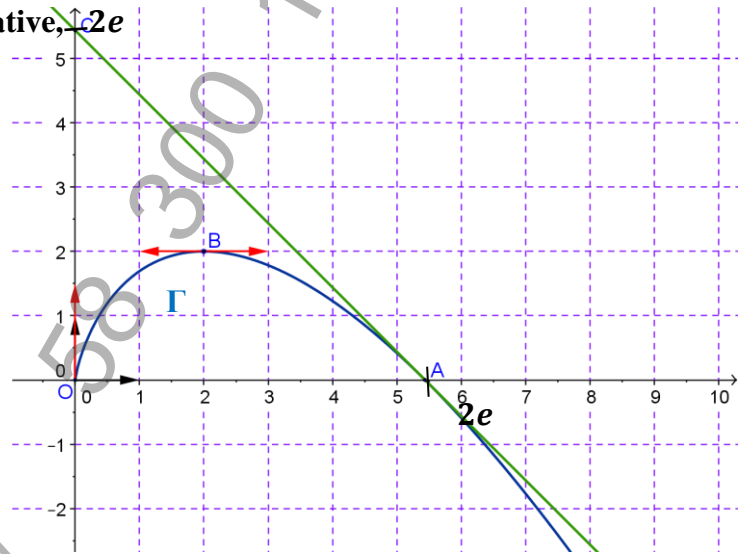
c) Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

5) a) Etudier les variations de  $f$  et tracer la courbe  $C_f$  de  $f$ .

**Exercice 8**

Dans le graphique ci-contre  $\Gamma$  est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

- \*Les points  $O, A$  et  $B$  appartiennent à  $\Gamma$ .
- \*La droite  $(AC)$  est la tangente à  $\Gamma$  au point  $A$ .
- \*  $\Gamma$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de  $+\infty$ .
- \*  $\Gamma$  admet une demi tangente verticale à droite en  $0$ .



1) Par une lecture graphique :

- a) Déterminer  $f(0), f(2), f(2e), f'(2)$  et  $f'(2e)$ .
- b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- c) Justifier que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $[2, +\infty[$

admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  et préciser l'ensemble de définition de  $g^{-1}$ .

2) On admet que  $g$  est définie par  $g(x) = x(1 + \ln 2 - \ln x)$ , pour tout  $x \geq 2$ . On désigne par  $C_g$  la courbe représentative de  $g$  et par  $C_{g^{-1}}$  celle de  $g^{-1}$  dans un repère orthonormé.

Tracer  $C_g$  et  $C_{g^{-1}}$ .

3) Soit  $\mathcal{D}$  l'aire de la partie du plan limitée par les axes  $(O, \vec{i})$  et  $(O, \vec{j})$  et les courbes  $C_g$  et  $C_{g^{-1}}$ .

b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que:  $\int_2^{2e} g(x) dx = e^2 - 3$  et calculer l'aire  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 9**

1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \ln^2 x$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

- a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- b) Etudier les branches infinies  $C_f$  de puis tracer  $C_f$ .

2) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1, +\infty[$

- a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- b) Tracer  $C_{g^{-1}}$  dans le même repère.

3) Soit la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $I_n = \frac{(-1)^n}{n} \int_1^e (\ln x)^n dx$

4) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq \int_1^e (\ln x)^n dx \leq e - 1$

b) En déduire la limite de la suite  $(I_n)$

5) a) Calculer  $I_1$

- b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a  $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} e + nI_n$
- c) Calculer  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$
- 6) Soit  $\mathcal{A}$  la mesure de l'aire de la partie limitée par la courbe  $C_f$  l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$
- a) Calculer  $\mathcal{A}$
- b) Calculer  $\int_1^e (f(x))^2 dx$ .

### Exercice 10

- A) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = x^4 - 1 + 3 \ln x$
- 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- c) Calculer  $g(1)$ .
- 2) En déduire que : si  $0 < x < 1$  alors  $g(x) < 0$  et si  $x > 1$  alors  $g(x) > 0$ .
- B) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x^3}$
- 1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) a) Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^4}$
- b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  et tels que  $0,5 < \alpha < 0,6$  et que  $3 < \beta < 3,1$
- 4) On désigne par  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  (unité graphique  $cm$ )
- a) Montrer que la droite  $D: y = x - 3$  est une asymptote à  $C_f$
- b) Etudier la position de  $C_f$  par rapport à  $D$ .
- c) Tracer  $D$  et  $C_f$ .
- 5) Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $F(x) = \frac{1+2 \ln x}{4x^2}$
- a) Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; F'(x) = -\frac{\ln x}{x^3}$
- b) Soit  $\mathcal{A}(\alpha)$  l'aire de la partie du plan limité par la courbe  $C_f$  la droite  $D$  et les droites  $x = \alpha$  et  $x = 1$  Montrer que  $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{-2\alpha^4 + 6\alpha^3 + \alpha^2 - 1}{\alpha^2} cm^2$ .

### Exercice 11

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$ .

- 1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) On a représenté ci-dessous la courbe représentative  $C_f$  de  $f$  ainsi que la courbe  $C_g$  de la fonction  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $(x) = \frac{1}{x+1}$ .

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties :  $\int_1^2 \ln(x+1) dx$

b) En déduire l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes  $C_f$  et  $C_g$  et les droites d'équations :  $x = 1$  et  $x = 2$ .

4) Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ .

a) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $U_{n+1} - U_n = f(n)$ .

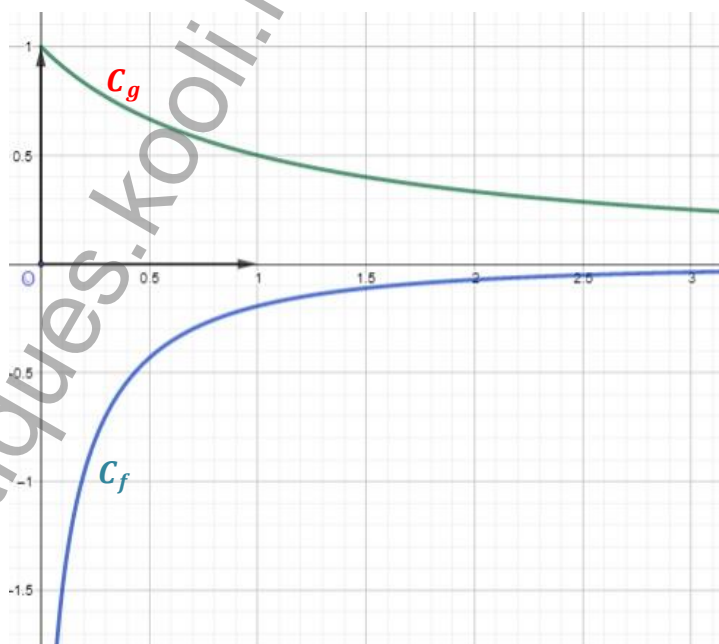
b) En déduire le sens de variation de  $(U_n)$ .

5) a) Soit un entier  $k \geq 1$ . Justifier que :  $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$ .

b) En déduire que pour tout  $k \geq 1$  on a :  $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .

c) Montrer que pour tout  $k \geq 1$  on a :  $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

d) Prouver que la suite  $(U_n)$  est convergente.



### Exercice 12

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  à droite en 0.

b) Montrer que pour tout  $x \in [0, +\infty[$  on a :  $f(x) \geq 0$ .

2) Soit la fonction  $F$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

a) Justifier l'existence de  $F$ .

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :  $F(x) = 2\sqrt{x} \ln(x+1) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$ .

3) Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ .

et soit  $H$  la fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  par  $H(x) = \int_0^{\tan^2 x} g(t) dt$ .

a) Montrer que  $H$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  et que  $H'(x) = 4\tan^2 x$ .

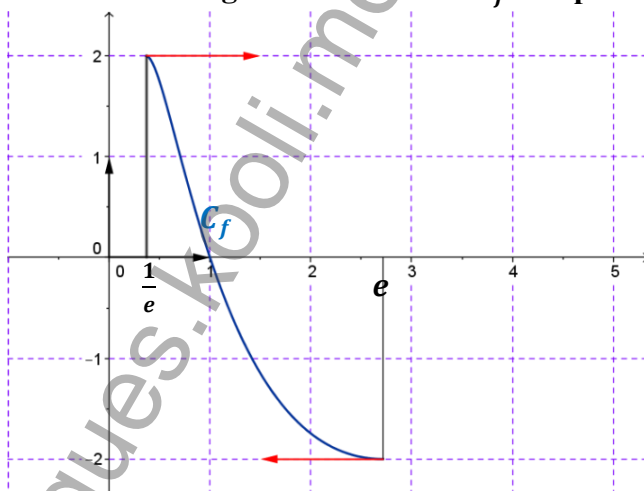
b) Expliciter  $H(x)$  pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ . Puis calculer  $I = \int_0^1 g(t) dt$ .

4) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe  $C_f$  et les droites d'équations  $x=0$ ,  $x=1$  et  $y=0$ .

### Exercice 13

1) Dans la figure ci-dessous, on représenté la courbe  $C_f$  d'une fonction définie sur  $[\frac{1}{e}, e]$

par  $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$  et les demi-tangentes à la courbe  $C_f$  aux points d'abscisses respectives  $\frac{1}{e}$  et  $e$



a) En utilisant le graphique : montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[\frac{1}{e}, e]$  sur  $[-2, 2]$ .

On note  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$  et  $C_{f^{-1}}$  la courbe représentative de  $f^{-1}$ .

b) Tracer la courbe  $C_{f^{-1}}$  et les demi-tangentes à  $C_{f^{-1}}$  aux points d'abscisses respectives  $-2$  et  $2$ .

2) Soit la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

a) Calculer  $a_1$

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier  $n \geq 1$  ;  $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$

c) En déduire que  $a_3 = 6 - 2e$

3) Soit l'aire de la partie du plan limité par la courbe  $C_{f^{-1}}$  et les droites d'équations  $x=0$  et  $y=e$

a) Calculer  $\int_1^e f(x) dx$

b) En déduire  $\mathcal{A}$ .

### Exercice 14



A) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $\varphi(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$ .

1) a) Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et que  $\forall x \in ]1, +\infty[ ; \varphi'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $\varphi$  et en déduire que  $\forall x \in ]1, +\infty[ ; \varphi(x) > 0$ .

B) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $f(x) = x \ln(x-1)$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

1) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et que  $\forall x \in ]1, +\infty[ : f'(x) = \varphi(x)$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) a) Montrer que le point  $I(2, 0)$  est un point d'inflexion de  $C_f$ .

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à  $C_f$  au point  $I$ .

c) Déterminer l'intersection de  $C_f$  avec la droite  $D : y = x$  et étudier les positions relatives de  $C_f$  et  $D$ .

d) Construire  $C_f$  (on précisera la nature de la branche infinie au voisinage de  $+\infty$ )

3) a) Montrer que  $f$  est une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $(f^{-1})'(1+e)$ .

c) Tracer dans le même repère la courbe  $C'$  représentative de  $f^{-1}$ .

4) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $C_f$  l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 3$

a) Vérifier que  $\forall x > 1 ; \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$

b) En déduire  $\mathcal{A}$ .

### Exercice 15

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x$

a) Montrer que pour tout  $t \in [x, x+1]$ , on a :  $\frac{1}{x+1} \leq f'(t) \leq \frac{1}{x}$

b) En déduire que  $x > 0$ , on a :  $\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $U_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq U_n$ .

b) Déduire un encadrement de  $U_n$  puis montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n} = 0$ .

3) a) Montrer que pour tout  $t \geq 0$ , on a :  $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ .

b) Déduire que pour tout  $x \geq 0$ , on a :  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ .

4) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_n = \frac{n^n}{n!}$

a) Montrer que  $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

b) Justifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$



- c) Dédurre que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n - \frac{1}{2}U_n \leq \ln(V_{n+1}) \leq n$ , montrer alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(V_n)}{n} = 1$ .
- 5) On pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $W_n = \frac{n}{n\sqrt{n!}}$
- a) Montrer que  $\ln(W_n) = \frac{\ln(V_n)}{n}$
- b) Dédurre  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n\sqrt{n!}}$

### Exercice 16

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = 1 + \ln[x(2-x)]$  et soit  $C_f$  sa courbe (unité graphique 4 cm).

- 1) Montrer que  $]0, 2[$  est le domaine de définition de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$
- 2) a) Montrer que la droite d'équation  $x = 1$  est un axe de symétrie de  $C_f$ .
- b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe  $C_f$  avec la droite  $(O, \vec{i})$ . On notera  $x_0$  la plus petite de ces abscisses.
- 3) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]0, 2[$  par :  $\varphi(x) = f(x) - x$ .
- a) Dresser le tableau de variation de la fonction  $\varphi$ .
- b) En déduire que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet dans  $]0, 2[$  exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée  $\alpha$ .
- c) Vérifier que  $x_0 < \alpha < 0,3$  et que  $\ln[\alpha(2-\alpha)] = \alpha - 1$ .
- d) Donner le signe de  $\varphi(x)$  et en déduire la position de la courbe  $C_f$  et la droite  $\Delta : y = x$ .
- 4) Tracer  $C_f$  et  $\Delta$  (on prendra  $x_0 = 0,2$ )
- 5) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0, 1]$ .
- a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $]0, 1]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- b) Calculer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .
- c) Tracer la courbe  $(C')$  de  $g^{-1}$ .

### Exercice 17

A) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 2(x-1) - \ln x$

- 1) a) Etudier les variations de  $g$ .
- b) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux racines 1 et  $\alpha$  et que  $0,2 < \alpha < 0,25$ .
- c) Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{x-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$  et soit  $C_f$  sa courbe.

- a) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.
- c) Montrer que  $f$  est dérivable en 1 et donner une équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  en  $A(1, 0)$ .
- 3) a) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ , on a :  $f'(x) = \frac{g(x) \ln x}{(x-1)^2}$
- b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $\varphi(x) = f(x) - x + 1$ .

- a) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  on a :  $\varphi'(x) = -\left(\frac{\ln x}{x-1} - 1\right)^2$ .
- b) Etudier les variations de  $\varphi$ . ( Calculer  $\varphi(1)$  ).
- c) En déduire la position relative de  $T$  et  $C_f$ .
- 4) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  par  $h(x) = 4x^2 - 4x$ .
- a) Montrer que  $f(\alpha) = h(\alpha)$ .
- b) Etudier le sens de variation de  $h$  et en déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .
- b) Tracer  $T$  et  $C_f$  (unité graphique  $cm$  ).
- B) Soit  $F$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .
- 1) Montrer que  $\forall t \in [1, +\infty[$ , on a :  $f(t) \geq \frac{4(\ln t)^2}{t}$ , en déduire que  $\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $F(x) \geq \frac{4}{3}(\ln x)^3$ .
- 2) Dresser le tableau de variation de  $F$ .
- 3) Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = F(n+1) - F(n)$ .
- a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(n) \leq U_n \leq f(n+1)$ .
- b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n}$ .

### Exercice 18

On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$  et  $J_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$

- 1) a) Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $J_n + nI_n = n$ .
- b) Calculer  $I_1$
- c) Montrer que  $\forall x \geq 0$  on a :  $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ .
- d) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $1 - \frac{1}{1+n} \leq I_n \leq 1$ . Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
- 2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que  $J_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ .

[On pourra écrire pour  $n \geq 2$  ;  $\frac{nx^n}{1+x^n} = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \times x$ ]

- b) Montrer que  $\forall t \geq 0$  on a :  $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ .
- c) En déduire que :  $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{1+n}$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \ln 2$ .
- 3) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - I_n)$ .

### Exercice 19

Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $U_n = \frac{1}{n} \int_1^e (\ln x)^n dx$

- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $U_n \geq 0$ .
- 2) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall x \in [1, e]$  on a :  $\frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} \leq \frac{1}{n} (\ln x)^n$ .
- b) En déduire que la suite  $(U_n)$  est décroissante.

- c) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente.
- 3) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $U_{n+1} = \frac{e}{n+1} - U_n$
- b) Calculer  $U_1, U_2$  et  $U_3$
- c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $U_n \leq \frac{e}{n}$
- d) En déduire alors la limite de la suite  $(U_n)$ .

### Exercice 20

Soient les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies sur  $\mathbb{N}^*$  par :

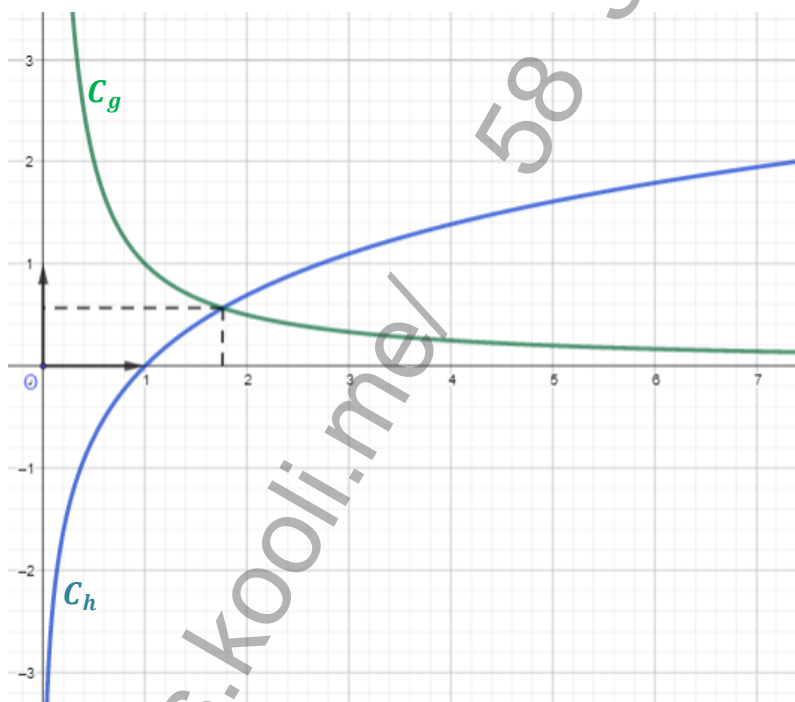
$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \quad \text{et} \quad V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

- 1) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$
- b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 2) On pose  $S_n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$  avec  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$
- a) Montrer que  $S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$  et que  $V_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$
- b) En déduire que  $|V_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$
- 3) a) En utilisant une intégration par parties montrer que :  $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\ln 2 - V_n)$
- b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)U_n$ .

### Exercice 21

- 1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x - x \ln x + x$ .
- a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
- b) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  on a :  $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ .
- 2) Dans la figure ci-dessous,  $C_g$  et  $C_h$  sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . des fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{1}{x}$  et  $h(x) = \ln x$ .
- Les courbes  $C_g$  et  $C_h$  se coupent en un point d'abscisse  $\beta$ .
- a) Par lecture graphique donner le signe de  $f'(x)$ .
- b) En déduire le sens de variation de  $f$ .
- c) Montrer que  $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$ .
- 3) On désigne par  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- a) Etudier la position relative de  $C_f$  et  $C_h$ .
- b) Montrer que la courbe  $C_f$  coupe l'axe  $(O, \vec{i})$  en deux points d'abscisses respectives  $x_1$  et  $x_2$  telles que  $0,4 < x_1 < 0,5$  et  $3,8 < x_2 < 3,9$ .
- c) Placer dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les points  $A(\beta, 0)$  et  $B\left(0, \frac{1}{\beta}\right)$ .

- d) Tracer  $C_f$ .
- 4) Pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $]0, +\infty[\setminus\{\beta\}$ , on désigne par  $\mathcal{A}(t)$  l'aire de la partie du plan  $S(t)$  limitée par les courbes  $C_g$  et  $C_h$  et la droite d'équation  $x = t$ .
- a) Montrer que pour tout réel  $t \in ]0, +\infty[\setminus\{\beta\}$ , on a :  $\mathcal{A}(t) = f(\beta) - f(t)$ .
- b) Soit  $t_0 > \beta$ . Hachurer  $S(t_0)$ .
- c) Montrer qu'il existe un unique réel  $t_1$  dans  $]0, \beta[$  tel que  $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_0)$   
Hachurer  $S(t_1)$ .



**Exercice 22**

A) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = x + 1 + \ln x$ .

- 1) Etudier les variations de  $g$ .
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  et que :  $0,27 < \alpha < 0,28$
- 3) Déduire le signe de  $g(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$

B) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  (unité graphique 4 cm)

- 1) a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.  
b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $\forall x > 0$  on a :  $f(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$   
b) Vérifier que  $f(\alpha) = -\alpha$ .  
c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu

- b) Tracer la courbe  $C_f$ .
- 4) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]\alpha, +\infty[$ .
- a) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $]\alpha, +\infty[$  sur  $]-\alpha, +\infty[$ .
- b) Montrer que  $h^{-1}$  la fonction réciproque de  $h$  est dérivable sur  $]-\alpha, +\infty[$  et calculer  $(h^{-1})'(0)$
- c) Etudier la dérivabilité de  $h^{-1}$  à droite en  $-\alpha$ .
- 5) Construire la courbe  $(C')$  de  $h^{-1}$  dans le même repère.

### Exercice 23

- 1) Soit  $a$  un réel strictement positif et  $x$  un réel de l'intervalle  $[a, a+1[$ .

a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{a+1}$

b) En déduire que  $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln a \leq \frac{1}{a}$  (1)

- 2) Soit  $(S_n)$  la suite définie pour  $n \geq 2$  par  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

a) Montrer, en utilisant (1), que  $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$ .

b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{S_n}$

- 3) Soit  $(U_n)$  la suite définie pour  $n \geq 2$  par  $U_n = S_n - \ln(n)$

a) Montrer la suite  $(U_n)$  est minorée par 0

b) Etudier la monotonie de la suite  $(U_n)$

### Exercice 24

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 1 + x - x \ln x$

a) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0, +\infty[$

et que  $3,5 < \alpha < 3,6$

c) Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$

- 2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{1+x}$  et soit  $C_f$  sa courbe représentative.

a) Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[$  ; on a  $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .

b) Soit la droite  $D : y = 2$  ; étudier la position de  $C_f$  et  $D$ .

On donnera les coordonnées du point  $I$  intersection de  $C_f$  et  $D$ .

c) Construire  $C_f$  et  $D$  (unité graphique 2 cm).

### Exercice 25

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = x - 1 + 2 \ln x$ .

a) Etudier le sens de variation de  $g$ .

b) Calculer  $g(1)$  puis déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .

c) En déduire que : si  $0 < x < 1$  alors  $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$  et si  $x > 1$  alors  $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ .

- 2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $C_f$  sa courbe représentative (unité graphique 2 cm).

- a) Montre que  $f$  est continue à droite en 0.
  - b) Montre que  $f$  est dérivable à droite en 0.
- 3) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et vérifier que pour tout  $x > 0$  on a :  $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$
- a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  et que :  $\frac{7}{4} < \alpha < 2$
- 4) a) Vérifier que la demi tangente  $\Delta$  à la courbe  $C_f$  au point  $O$  a pour équation : 
$$\begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$$
- b) Etudier la position de  $C_f$  par rapport à  $\Delta$ .
  - c) Tracer  $\Delta$  et  $C_f$ .
- 5) Soit  $\beta$  un réel de l'intervalle  $]0, 1[$ .
- a) Calculer en  $cm^2$ , l'aire  $\mathcal{A}(\beta)$  du domaine limité par la courbe  $C_f$  la droite  $\Delta$  et les droites d'équations respectives :  $x = \beta$  et  $x = 1$ .
  - b) Calculer  $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\beta)$ .
- 6) On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $U_0 \in ]0, 1[$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $U_{n+1} = f(U_n)$
- a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $0 < U_n < 1$ .
  - b) Montrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
  - c) En déduire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et calculer sa limite.