Fonction logarithme népérien 4ème Mathématiques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - x & si\ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier la branche infinie de C_f.

c) Déterminer le point I intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses autre que O.

d) Construire la courbe C_f.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en -1

4) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

5) a) Calculer $\displaystyle\int_1^e x\ln x\, dx$

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 2

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\ dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties calculer I_1.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante, en déduire que la suite (I_n) est convergente.

3) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$.

b) Calculer I_2 et I_3.

4) Calculer $\displaystyle\int_1^e x(1 + \ln x)^3\ dx$.

Exercice 3

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1 + x^2}\ dx$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq 0$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$

2) Calculer U_0, U_1 et U_2

3) Montrer que (U_n) est décroissante.

4) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4

On pose pour tout $x \in]-1,+\infty[$; $A = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$ et $B = \int_0^1 \ln(x+1)\,dx$.

1) a) Vérifier que pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a : $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$

b) En déduire que $A = 1 - \ln 2$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer B.

2) Pour tout entier naturel n non nul on pose : $I_n = \int_0^1 \ln(x+1) + \frac{2x^n}{1+x}\,dx$.

a) Donner la valeur de I_1.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n \geq 0$.

c) En déduire que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{n+1}$ *et* en déduire la limite de I_n.

Exercice 5

A) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(1+2x)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Etudier les variations de f.

2) Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$ on a : $f(x) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{x} + 2\right)$

3) Soit g la fonction définie$\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ exactement deux solutions 0 et α et que $1 < \alpha < 1{,}5$

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

c) Etudier les positions relatives de C_f et la droite $\Delta : y = x$.

4) a) Etudier la branche infinie de C_f.

b) Tracer C_f et Δ.

5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe $C_{f^{-1}}$ représentative de f^{-1} dans le même repère.

6) Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbesC_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \alpha$ Montrer que $A(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$.

B) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq \alpha$.

2) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$

1) a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : : $U_n + U_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

c) Calculer U_3 et U_4

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq 0$

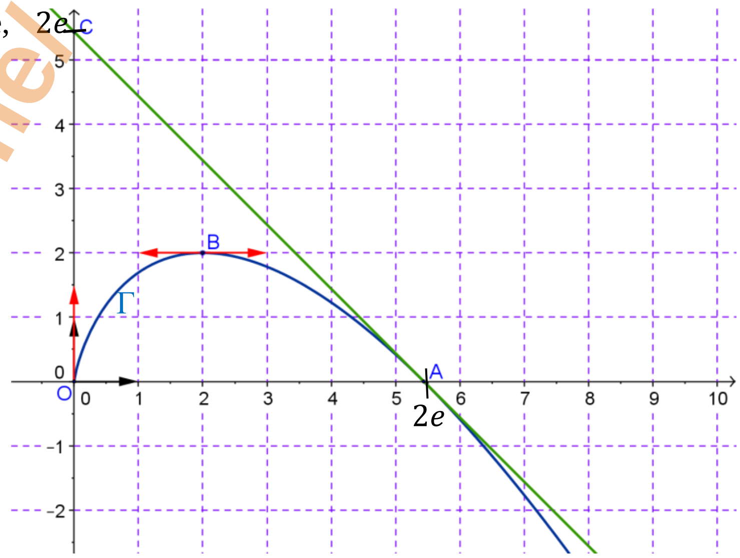
b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et $\forall x \in \left[0 \,, \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $(\tan x)^n \leq \frac{\sin x}{(\cos x)^n}$

b) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a :$U_n \leq \frac{1}{n+1}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} - 1\right)$

Exercice 7



Dans le graphique ci-contre Γ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0 \,, +\infty[$ et dérivable sur $]0 \,, +\infty[$.

*Les points O, A et B appartiennent à Γ.

*La droite (AC) est la tangente à Γ au point A.

* Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

* Γ admet une demi tangente verticale à droite en 0.

1) Par une lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$, $f(2)$, $f(2e)$, $f'(2)$ et $f'(2e)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Justifier que la restriction g de f à l'intervalle $[2 \,, +\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser l'ensemble de définition de g^{-1}.

2) On admet que g est définie par $g(x) = x(1 + \ln 2 - \ln x)$, pour tout $x \geq 2$. On désigne par C_g la courbe représentative de g et par $C_{g^{-1}}$ celle de g^{-1} dans un repère orthonormé.

Tracer C_g et $C_{g^{-1}}$.

3) Soit $\mathcal{D}$ l'aire de la partie du plan limité par les axes $(O \,, \vec{\imath})$ et $(O \,, \vec{\jmath})$ et les courbes C_g et $C_{g^{-1}}$.

b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que: $\int_2^{2e} g(x)dx = e^2 - 3$ et calculer l'aire D.

Exercice 8

Soit g la fonction définie sur $]0 \,, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$; $g'(x) = -4x\ln x$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α.

b) Vérifier que $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$.

c) Déduire le signe de g(x) sur $]0,+\infty[$.

4) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

5) a) Etudier les variations de f et tracer la courbe C_f de f.

Exercice 9

1) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 1 + ln^2 x$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier les branches infinies C_f de puis tracer C_f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1,+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer $C_{g^{-1}}$ dans le même repère.

3) Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\,dx$

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\,dx \le e - 1$

b) En déduire la limite da la suite (I_n)

5) a) Calculer I_1

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}e + nI_n$

c) Calculer I_2 , I_3 et I_4

6) Soit $\mathscr{A}$ la mesure de l'aire de la partie limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

a) Calculer $\mathscr{A}$

b) Calculer $\displaystyle\int_1^e (f(x))^2 dx$.

Exercice 10

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^4 - 1 + 3\ln x$

1) a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Calculer $g(1)$.

2) En déduire que : si $0 < x < 1$ alors $g(x) < 0$ et si $x > 1$ alors $g(x) > 0$.

B) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x^3}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) a) Montrer que $\forall x \in\,]0\,,+\infty[\,;\; f'(x) = \frac{g(x)}{x^4}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,,+\infty[$ exactement deux solutions α et β et tels que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$ et que $3 < \beta < 3{,}1$

4) On désigne par C_f la courbe représentative de f (unité graphique 2 cm)

a) Montrer que la droite $D: y = x - 3$ est une asymptote à C_f

b) Etudier la position de C_f par rapport à D.

c) Tracer D et C_f.

5) Soit F la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $F(x) = \frac{1+2\ln x}{4x^2}$

a) Montrer que $\forall x \in\,]0\,,+\infty[\,;\, F'(x) = -\frac{\ln x}{x^3}$

b) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C_f la droite D et les droites $x = \alpha$ et $x = 1$

Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{-2\alpha^4+6\alpha^3+\alpha^2-1}{\alpha^2}\quad cm^2$.

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) + \ln(x+1)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) On a représenté ci-dessous la courbe représentative C_f de f ainsi que la courbe C_g de la fonction g définie sur $[0\,,+\infty[$ par $(x) = \frac{1}{x+1}$.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_1^2 \ln(x+1)\; dx$

b) En déduire l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes C_f et C_g et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$.

4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} - \ln n$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_{n+1} - U_n = f(n)$.

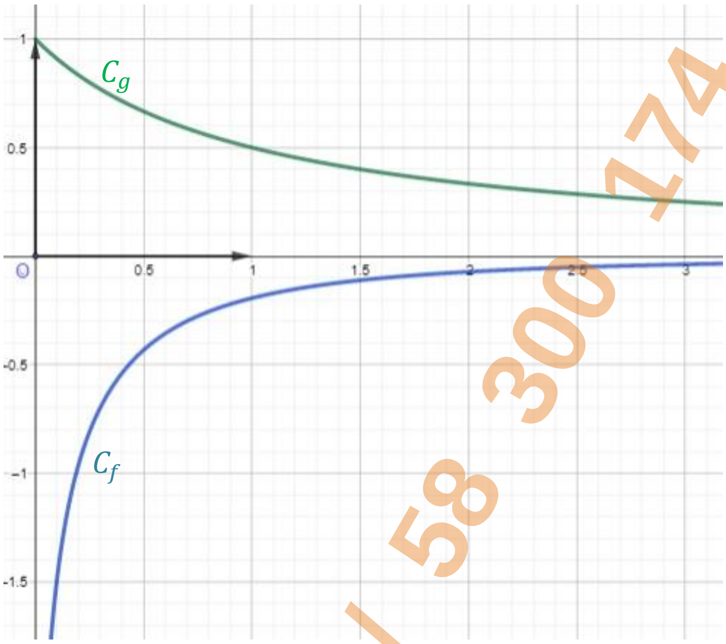
b) En déduire les sens de variation de (U_n).

5) a) Soit un entier $k \geq 1$. Justifier que : $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$.

b) En déduire que pour tout $k \geq 1$ on a : $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

c) Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a : $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}$

d) Prouver que la suite (U_n) est convergente.



Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & si\ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

b) Montrer que pour tout $x \in [0\,,+\infty[$ on a : $f(x) \geq 0$.

2) Soit la fonction F définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Justifier l'existence de F.

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $F(x) = 2\sqrt{x}\ln(x+1) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$.

3) Soit la fonction g définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

et soit H la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x) = \int_0^{tan^2 x} g(t)\ \,dt$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $H'(x) = 4tan^2 x$.

b) Expliciter $H(x)$ pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$. Puis calculer $I = \int_0^1 g(t)\,dt$.

4) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

Exercice 13

A) Soit φ la fonction définie sur $]1\,,+\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$.

1) a) Montrer que φ est dérivable sur $]1\,,+\infty[$ et que $\forall x \in\ ]1\,,+\infty[\ ;\ \varphi'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de φ et en déduire que $\forall x \in]1\,,+\infty[\,;\ \varphi(x) > 0$.

B) Soit f la fonction définie sur $]1\,,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x-1)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]1\,,+\infty[$ et que $\forall x \in]1\,,+\infty[: f'(x) = \varphi(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point $I(2\,,0)$ est un point d'inflexion de C_f.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à C_f au point I.

c) Déterminer l'intersection de C_f avec la droite $D : y = x$ et étudier les positions relatives de C_f et D.

d) Construire C_f (on précisera la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$)

3) a) Montrer que f est une bijection de $]1\,,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f^{-1} la fonction réciproque de f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(1+e)$.

c) Tracer dans le même repère la courbe C' représentative de f^{-1}.

4) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$

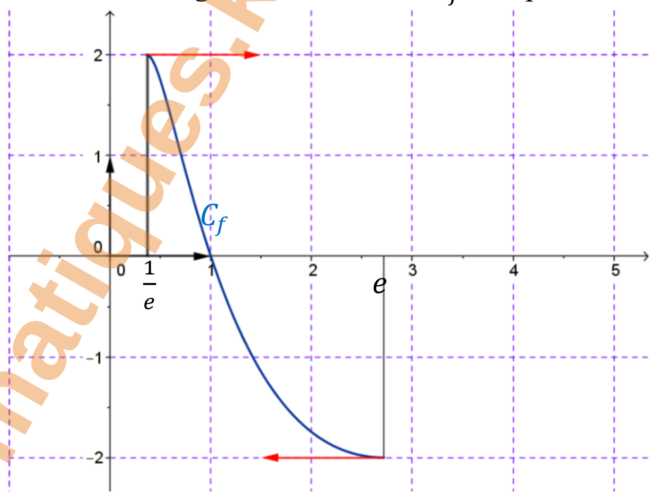
a) Vérifier que $\forall\, x > 1\,;\ \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$

b) En déduire $\mathcal{A}$.

Exercice 14

1) Dans la figure ci-dessous, on représenté la courbe C_f d'une fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}\,, e\right]$

par $f(x) = ln^3x - 3lnx$ et les demi- tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e



a) En utilisant le graphique : montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}\,, e\right]$ sur $[-2\,,2]$. On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1}.

b) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ et les demi- tangentes à $C_{f^{-1}}$ aux points d'abscisses respectives -2 et 2.

3) Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par : $a_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\, dx$

a) Calculer a_1

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n \geq 1\,;\ a_{n+1} = e - (n+1)a_n$

c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $y = e$

a) Calculer $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$

b) En déduire $\mathcal{A}$.

Exercice 15

1) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = \ln x$

a) Montrer que pour tout $t \in [x\,,x+1]$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq f'(t) \leq \frac{1}{x}$

b) En déduire que $x > 0$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}^*$, on a : $U_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq U_n$.

b) Déduire un encadrement de U_n puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n} = 0$.

3) a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.

b) Déduire que pour tout $x \geq 0$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{n^n}{n!}$

a) Montrer que $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$

c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n - \frac{1}{2}U_n \leq \ln(V_{n+1}) \leq n$, montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(V_n)}{n} = 1$.

5) On pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Montrer que $\ln(W_n) = \frac{\ln(V_n)}{n}$

b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \ln[x(2-x)]$ et soit C_f sa courbe (unité graphique 4 cm).

1) Montrer que $]0\,,2[$ est le domaine de définition de f et dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de C_f.

b) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite $(O\,,\vec{\imath})$ .On notera x_0 la plus petite de ces abscisses.

3) Soit φ la fonction définie sur $]0\,,2[$ par : $\varphi(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction φ.

b) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans $]0\,,2[$ exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée α.

c) Vérifier que $x_0 < \alpha < 0{,}3$ et que $\ln[\alpha(2-\alpha)] = \alpha - 1$.

d) Donner le signe de $\varphi(x)$ et en déduire la position de la courbe C_f et la droite $\Delta : y = x$.

4) Tracer C_f et Δ (on prendra $x_0 = 0{,}2$)

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0\,,1]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Tracer la courbe (C') de g^{-1}.

Exercice 17

A) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = 2(x-1) - \ln x$

1) a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux racines 1 et α et que $0{,}2 < \alpha < 0{,}25$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{x-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter le résultat graphiquement.

c) Montrer que f est dérivable en 1 et donner une équation de la tangente T à C_f en $A(1\,,0)$.

3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)\ln x}{(x-1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - x + 1$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ on a : $\varphi'(x) = -\left(\frac{\ln x}{x-1} - 1\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variation de φ.

c) En déduire la position relative de T et C_f.

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$ par $h(x) = 4x^2 - 4x$.

a) Montrer que $f(\alpha) = h(\alpha)$.

b) Etudier le sens de variation de h et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

b) Tracer T et C_f (unité graphique 2 cm).

B) Soit F la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)\ dt$.

1) Montrer que $\forall t \in [1\,,+\infty[$, on a : $f(t) \geq \frac{4(\ln t)^2}{t}$, en déduire que $\forall t \in [1\,,+\infty[$, $F(x) \geq \frac{4}{3}(\ln x)^3$.

2) Dresser le tableau de variation de F.

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = F(n+1) - F(n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \leq U_n \leq f(n+1)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$.

Exercice 18

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,dx$

1) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $J_n + nI_n = n$.

b) Calculer I_1

c) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - \frac{1}{1+n} \leq I_n \leq 1$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $J_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

[On pourra écrire pour $n \geq 2$; $\frac{nx^n}{1+x^n} = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \times x$]

b) Montrer que $\forall\, t \geq 0$ on a : $0 \leq \ln(1+t) \leq t$.

c) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \frac{1}{1+n}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \ln 2$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $J_n + nI_n = n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - I_n)$.

Exercice 19

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{1}{n}\int_1^e (\ln x)^n\,dx$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq 0$.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [1\,,e]$ on a : $\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} \leq \frac{1}{n}(\ln x)^n$

b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1} = \frac{e}{n+1} - U_n$

b) Calculer U_1, U_2 et U_3

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \leq \frac{e}{n}$

d) En déduire alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 20

1) Soit la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = \ln x - x\ln x + x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

2) Dans la figure ci-dessous, C_g et C_h sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

des fonctions g et h définies sur $]0\,,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$.

Les courbes C_g et C_h se coupent en un point d'abscisse β.

a) Par lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

3) On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

a) Etudier la position relative de C_f et C_h.

b) Montrer que la courbe C_f coupe l'axe $(O\,,\vec{\imath}\,)$ en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0{,}4 < x_1 < 0{,}5$ et $3{,}8 < x_2 < 3{,}9$.

c) Placer dans le repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ les points $A(\beta\,,0)$ et $B\left(0\,,\,\frac{1}{\beta}\right)$.

d) Tracer C_f.

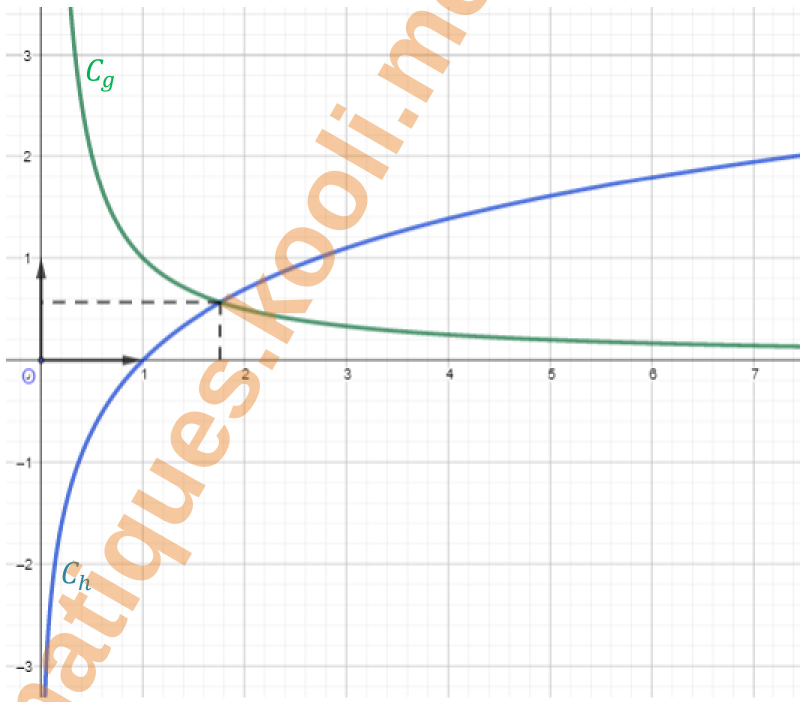
4) Pour tout réel t de l'intervalle $]0\,,+\infty[\setminus\{\beta\}$, on désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de la partie du plan $S(t)$ limitée par les courbes C_g et C_h et la droite d'équation $x = t$.

a) Montrer que pour tout réel $t \in\,]0\,,+\infty[\setminus\{\beta\}$, on a : $\mathscr{A}(t) = f(\beta) - f(t)$.

b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.

c) Montrer qu'il existe un unique réel t_1 dans $]0\,,\beta[$ tel que $\mathscr{A}(t_1) = \mathscr{A}(t_0)$

Hachurer $S(t_1)$.



Exercice 21

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \int_0^1 x^n\, ln(1+x)dx \qquad et \qquad V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

1) a) Montrer que $\forall \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le U_n \le \frac{ln2}{n+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2) On pose $S_n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$ avec $x \in [0\,,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $S_n = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ et que $V_n = ln2 + (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

b) En déduire que $|V_n - ln2| \leq \frac{1}{n+2}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

3) a) En utilisant une intégration par parties montrer que : $U_n = \frac{ln2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}(ln2 - V_n)$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)U_n$.

Exercice 22

A) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln x$.

1) Etudier les variations de g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0\,,+\infty[$ une unique solution α et que :$0{,}27 < \alpha < 0{,}28$

3) Déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

B) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} & si\;\; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f (unité graphique $4\,cm$)

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que $\forall x > 0$ on a : $f(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

b) Tracer la courbe C_f.

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]\alpha\,,+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[\alpha\,,+\infty[$ sur $[-\alpha\,,+\infty[$.

b) Montrer que h^{-1} la fonction réciproque de h est dérivable sur $[-\alpha\,,+\infty[$ et calculer $(h^{-1})'(0)$

c) Etudier la dérivabilité de h^{-1} à droite en $-\alpha$.

5) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère.

Exercice 23

1) Soit a un réel strictement positif et x un réel de l'intervalle $[a\,,a+1[$.

a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a+1}$

b) En déduire que $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln a \leq \frac{1}{a}$ **(1)**

2) Soit (S_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

a) Montrer, en utilisant (1) , que $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{S_n}$

Exercice 24

1) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,,+\infty[$ et que $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$

2) Soit la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{1+x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Montrer que $\forall x \in\,]0\,,+\infty[$; on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

b) Soit la droite $D : y = 2$; étudier la position de C_f et D.

On donnera les coordonnées du point I intersection de C_f et D.

c) Construire C_f et D (unité graphique $2\ cm$).

Exercice 25

1) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + 2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

c) En déduire que : si $0 < x < 1$ alors $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ et si $x > 1$ alors $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$.

2) On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2\ln x & si\ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative (unité graphique $2\ cm$).

a) Montre que f est continue à droite en 0.

b) Montre que f est dérivable à droite en 0.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$ et vérifier que pour tout $x > 0$ on a : $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,,+\infty[$ une unique solution α et que : $\frac{7}{4} < \alpha < 2$

4) a) Vérifier que la demi tangente Δ à la courbe C_f au point O a pour équation : $\begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$

b) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

c) Tracer Δ et C_f.

5) Soit β un réel de l'intervalle $]0\,,1[$.

a) Calculer en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}(\beta)$ du domaine limité par la courbe C_f la droite Δ et les droites d'équations respectives : $x = \beta$ et $x = 1$.

b) Calculer $\lim\limits_{\beta \to 0^+} A(\beta)$.

6) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 \in\,]0\,,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < U_n < 1$.

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.