FONCTION EXPONENTIELLE 4ème MATHEMATIQUES

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

1) Soient les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x} + x - 1$ et $h(x) = e^{x} - x - 1$

   a) Dresser les tableaux de variation de g et h

   b) Montrer alors que pour tout $x \geq 0$ on a $g(x) \geq 0$ et $h(x) \geq 0$

   a) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$.

2) Montrer que pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1 - \frac{1}{nx} \leq e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1 - \frac{1}{1+nx}$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\right) dt$ et $V_n = nU_n$.

   a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n}$.

   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $F_n(x) = \int_n^{nx} \varphi(t)\ dt$ où $\varphi(t) = 1 - e^{-\frac{1}{t}}$

   a) Vérifier que pour tout réel $x \geq 1$ on a : $F'_n(x) = n\left(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\right)$.

   b) Calculer $F_n(1)$ puis déduire que $U_n = \frac{1}{n}\int_n^{2n} \varphi(t)\ dt$.

   c) Interpréter graphiquement les termes de chacune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$.

et soit (C_n) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

   b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.

   c) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'_n(x) = \left(1 + \frac{1}{nx}\right)e^{-\frac{1}{nx}}$

   d) Dresser le tableau de variation de f_n.

2) On se propose d'étudier la branche infinie de (C_n).

   a) Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$.

   b) En déduire que pour $u \in [0, +\infty[$, $0 \leq e^{-u} - (1 - u) \leq \frac{u^2}{2}$.

   c) Montrer alors que $\forall x \in]0, +\infty[$, $0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$.

   d) Conclure.

3) Tracer la courbe (C_1) et son asymptote en précisant la tangente en 0.

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 f_n(x)\ dx$.

a) Montrer que $\forall x \in [0\,,1], f_n(x) \leq x$. En déduire que $\forall n \geq 1, I_n \leq \frac{1}{2}$.

b) En utilisant 2)c) montrer que $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel non nul, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\frac{-x}{n}}$ et soit C_n sa représentation graphique.

1) a) Dresser le tableau de variation de f_n.

b) Vérifier que toutes les courbes C_n passent par le point $J(0\,,1)$.

c) Pour tout entier naturel non nul, étudier la position relative de C_n et C_{n+1} sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0]$ et $[0\,,+\infty[$.

2) Dans la figure ci-dessous, on a tracé les courbes C_1 et C_3 ainsi que la droite $\Delta : y = x$.

a) Compléter les phrases suivantes :

* « La courbe tracée en trait interrompu est celle de ---------------------------- »

* « La courbe tracée en trait continu est celle de ---------------------------- »

b) Tracer alors la courbe C_2 de la fonction f_2 dans le même repère.

3) On considère la fonction g_n définie sur $[0\,,+\infty[$ par $g_n(x) = f_n(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de g_n.

b) Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]0\,,1[$ tel que $g_n(x_n) = 0$, on définie ainsi une suite (x_n) pour tout entier naturel non nul.

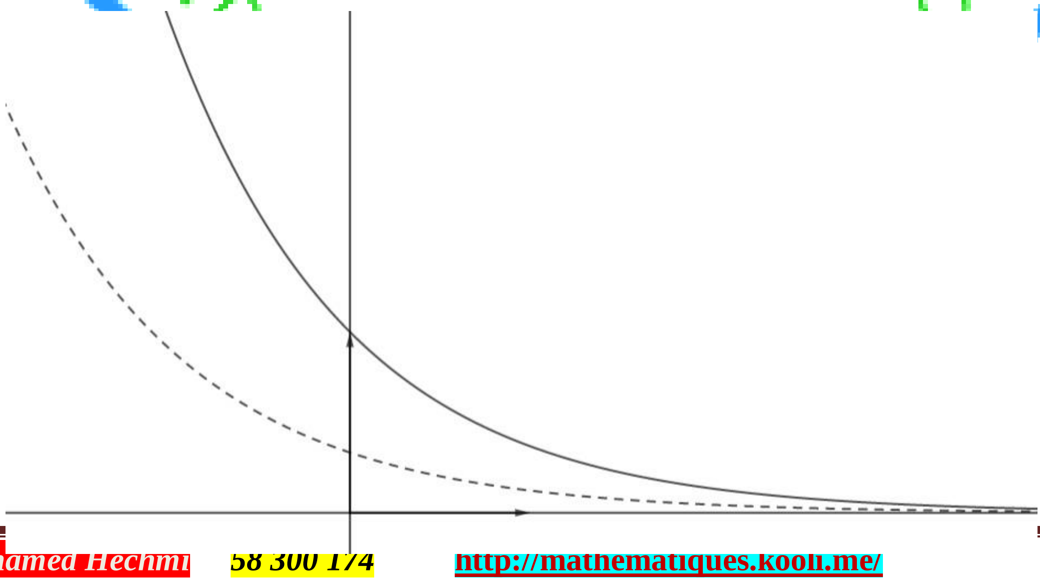
c) Vérifier que x_n est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_n de f_n et la droite Δ.

d) Placer les trois premiers termes de suite (x_n) sur l'axe des abscisses.

4) a) Montrer que $g_{n+1}(x_n) = e^{\frac{-x_n}{n+1}} - e^{\frac{-x_n}{n}}$

b) Montrer que $g_{n+1}(x_n) > g_{n+1}(x_{n+1})$ puis conclure que la suite (x_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=\ln(\tan x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équation :

$x=0$, $x=\ln(\sqrt{3})$ et $y=0$.

Exercice 5

1) Pour tout réel $x\geq 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $G_n(x)=\int_0^x e^{-nt}\,dt$.

a) Montrer que : $G_n(x)=\frac{1}{n}-\frac{e^{-nx}}{n}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} G_n(x)=\frac{1}{n}$.

2) a) Montrer que pour tout réel $t\geq 0$, $1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1$.

b) En déduire que pour tout réel $p\geq 0$, $p-\frac{p^2}{2}\leq\ln(1+p)\leq p$.

3) Soit la fonction F_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $F_n(x)=\int_0^x e^{-t}\ln(1+e^{-nt})\,dt$.

a) Montrer que : F_n est croissante sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$ $G_{n+1}(x)-\frac{G_{2n+1}(x)}{2}\leq F_n(x)\leq G_{n+1}(x)$.

c) Montrer que F_n admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On pose $U_n=\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)$.

d) Montrer que tout entier $n\geq 1$, $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{4n+2}\leq U_n\leq\frac{1}{n+1}$.

e) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) Pour tout réel $x\geq 0$, on pose $H_n(x)=\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^{nt}}\,dt$

a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :
$F_n(x)=\ln 2-e^{-x}\ln(1+e^{-nx})-nH_n(x)$.

b) Déduire que H_n admet une limite finie W_n lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_n=\ln 2$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que le point $\Omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe (C).

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

b) Vérifier que : $\alpha = ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$.

3) Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^{\alpha} \frac{e^{nx}}{(1+e^x)^n}\, dx$

a) Montrer que $I_1 = -ln\left(2(1-\alpha)\right)$.

b) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = f(x) - (f(x))^2$

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - \alpha^n\right)$.

d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive, que peut-on en déduire ?

4) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\alpha}{2^n} \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$.

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

5) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}, I_n = -ln\left(2(1-\alpha)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$.

Exercice 7

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Etudier la branche infinie de (C_f).

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $f''(x) = \frac{1}{4} \times \frac{e^x(e^x-2)}{(e^x-1)\sqrt{e^x-1}}$ et en déduire que (C_f) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C_f) au point I.

c) Tracer T et (C_f).

3) Soit u la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $u(x) = \ln(1 + tan^2 x)$.

a) Calculer que $u'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Justifier que $u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +\infty[$.

4) Soit la fonction G définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = \int_0^{\ln(1+tan^2 x)} f(t)\, dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G'(x) = 2tan^2 x$.

b) En déduire une deuxième expression de $G(x)$ pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Calculer alors $\mathscr{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 0$ et $x = \ln 2$.

Exercice 8

Soit f_n la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (C_n) la courbe de f_n dans le repère orthogonal $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\|\vec{\jmath}\| = 10$.

A)

1) a) Dresser le tableau de variation de f_1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, dresser le tableau de variation de f_n.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les positions relatives de (C_{n+1}) et (C_n).

3) On a tracé ci-dessous les courbes (C_1) et (C_3).

a) Sans justification, graduer le repère puis nommer sur le graphique les deux courbes.

b) Tracer soigneusement la courbe (C_2) ainsi que les demi-tangentes à l'origine pour chacune des trois courbes.

B) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = f_n(n)$.

1) a) En utilisant les résultats de la partie A) démontrer que (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b) La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

2) a) Montrer que pour tout $t \in [0\,,1]$, on a : $\frac{1}{1+t} \leq 1 - \frac{t}{2}$.

b) Déduire que pour tout $x \in [0\,,1]$, on a : $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{4}$.

c) Prouver alors que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

3) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{U_{k+1}}{U_k} \leq e^{-\frac{1}{4k}}$.

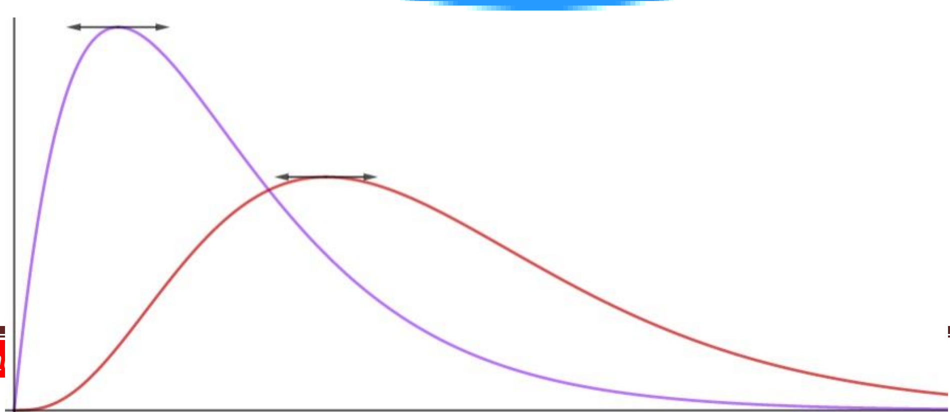
b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, on a : $U_n \leq e^{-\left(1+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)}$

4) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [k, k+1]$ on a : $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ on a : $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

c) Montrer alors que pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, on a : $U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$.

d) Déterminer alors la limite de suite (U_n).



Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)e^{-x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier les branches infinies de (C_f).

c) Tracer (C_f).

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \int_0^n f(x)\,dx$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = 2 - (n+2)e^{-n}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_k = \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, U_n = (e-1)ke^{-k} + (e-2)e^{-k}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (e-1)\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{-k} + \dfrac{e-2}{e-1}(1-e^{-n})$.

5) Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ke^{-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{e}{(e-1)^2}$.

Exercice 10

I) Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,,1[$ par : $f(x) = e^{-x} - \ln(1-x) - 2$ et soit C_f sa représentation graphique.

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^{x} + x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de u.

b) Calculer $u(0)$ puis déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) a) Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = (x-1)\left[\left(\frac{e^{-x}}{-x}\right)\left(1 - \frac{1}{1-x}\right) - \frac{\ln(1-x)}{1-x}\right] - 2$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.

c) Vérifier que pour tout < 1, $f'(x) = \frac{e^{-x}u(x)}{1-x}$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) On a tracé ci-dessous les courbes C_h et C_g des fonctions h et g définies par :

$h(x) = e^{-x}$ et $g(x) = \ln(1-x) - 2$.

C_h et C_g se coupent en deux points d'abscisses respectives α et β tel que $\alpha < \beta$.

a) Justifier que α et β sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $]-\infty\,,1[$.

b) Placer les points de C_f d'abscisses α et β.

c) Tracer C_f dans le même repère.

Exercice 11

1) Soit la fonction u définie sur IR par : $u(x) = e^x - x$.

a) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} u(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x)$

b) Dresser le tableau de variation de u.

c) En déduire que : $\forall x \in IR, u(x) > 0$.

2) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = (2-x)e^x - 1$.

a) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions ; on notera par α la solution qui appartient à l'intervalle $]-\infty, 1]$ et par β l'autre solution.

d) Fn déduire le signe de $g(x)$ sur IR.

3) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$ on désigne par C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ et que $f(\beta) = \frac{1}{\beta-1}$.

c) Vérifier que $\forall x \in IR$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

d) Tracer dans un repère orthonormé (unité graphique $2\ cm$) la courbe de f.

On prendra $\alpha = -1,1$ et $\beta = 1,8$.

4) Soit $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-e^{-2x}}$; on désigne par C_f sa courbe représentative.

1) a) Justifier que $\mathbb{R}_+$ est le domaine de définition de la fonction f.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) Etudier les variations de f et tracer sa courbe C_f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de IR_+ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f ; calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

c) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction f^{-1}.

Exercice 13

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$par : $U_n = -\int_1^0 \frac{x}{n+e^x}dx$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \leq 0$.

b) Montrer que la suite U est monotone.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in [0\,,1]$ on a : $\frac{x}{n+3} \leq \frac{x}{n+e^x} \leq \frac{x}{n+1}$

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$on a $\frac{-1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{-1}{2(n+3)}$.

e) Déterminer la limite de la suite U.

2) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \sum_{k=1}^{n} |U_k|$

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} \geq \ln(n+4) - \ln 4$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_n \geq \frac{1}{2}[\ln(n+4) - \ln 4]$.

d) Déterminer alors la limite de la suite V.

Exercice 14

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{1-x}$ et soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Etudier les branches infinies de (Γ).

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ interpréter les résultats graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Etudier la position relative de (C_g) et (C_f).

d) Tracer (C_g) et (C_f) dans le même repère.

3) Soit x un réel de l'intervalle $[1\,,+\infty[$ et les points M et N d'abscisse x tel que $M \in (C_f)$ et $N \in (\Gamma)$.

a) Calculer la distance MN en fonction de x.

b) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale.

4) a) Calculer $S(t)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_f) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$ tel que t un réel de l'intervalle $[1\,,+\infty[$.

b) Calculer $\lim_{t\to+\infty} S(t)$.

5) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_1^2 (x-1)^n e^{1-x}\, dx$

a) Calculer U_1.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

6) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)U_n$.

b) Calculer U_2 et U_3.

c) En déduire $I = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2)e^{1-x}\ dx$

Exercice 15

1) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 + xe^x$.

a) Etudier les variations de g sur IR.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur IR.

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + e^x(x-1)$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) Etudier les variations de f sur IR.

b) Montrer que la droite $D : y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et préciser sa tangente au point d'abscisse 1

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR.

b) Tracer dans le même repère la courbe $\mathcal{C}'$ de la fonction f^{-1} réciproque de f.

c) Calculer la mesure $\mathcal{A}$ de l'aire du domaine plan :

$\mathcal{D} = \{M(x\,,y) \in P / -1 \le x \le 0\ et\ 0 \le y \le f^{-1}(x)\} \cup \{M(x\,,y) \in P / 0 \le x \le 1\ et\ x \le y \le f^{-1}(x)\}$

Exercice 16

Soit la suite U définie sur IN^* par : $U_n = \int_0^1 e^{-x}(x-1)^n\,dx$

1) a) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $U_{n+1} - (n+1)U_n = (-1)^{n+1}$.

b) Calculer U_1 et U_2.

2) Pour tout $n \in IN^*$ on pose : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $\frac{e^{-1}}{2n+1} \le V_n \le \frac{1}{2n+1}$

b) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : : $\frac{-1}{2n+2} \le W_n \le \frac{-e^{-1}}{2n+2}$

c) Déterminer alors la limite de la suite U.

3) a) Montrer que les suite V et W sont monotones.

b) Montrer que les suite V et W sont adjacentes.

Exercice 17

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x}$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) = (x-2)e^{-x}$

2) Etudier le sens de variation de g. Calculer $g(2)$.

3) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) > 0$.

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + xe^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que le point I de (C) d'abscisse 2 est un point d'inflexion de (C).

3) a) Montrer que la droite $D : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) et D.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat obtenu graphiquement.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que l'équation $f(x) =)0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0,5 < \alpha < 1$

5) On note f^{-1} la réciproque de f et soit (C') sa courbe représentative.

a) Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f(1)$ puis $(f^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right)$.

d) Construire (C) et (C') dans le même repère

5) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite D et les droites $x = 0$ et $x =$ 1

Exercice 18

1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$.

a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C.

b) Préciser la position de C par rapport à la droite $D : y = x$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

b) Construire la courbe C' de f^{-1}.

3) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la région du plan comprise entre les courbes C et C'.

4) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - \frac{2}{1+e^x}$ On désigne par (C) sa courbe représentative.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point O.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x}{2} - f(x)$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Préciser la position relative de (C) par rapport à T.

3) Tracer (C) et T.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,,1[$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-1\,,1[$.

c) Tracer la courbe (C') de f^{-1}.

5) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{1+e^x}$

b) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 20

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,,1]$ par :

$f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1) Etudier les variations de f_n.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution U_n et que $U_n \in]0\,,1[$.

On définie ainsi sur IN^*, une suite (U_n).

3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0\,,1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $f_n(U_{n+1}) < 0$.

c) Montrer que la suite (U_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\ln(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$

b) Calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative (unité graphique cm).

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$

c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	3 $+$	
$f(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans IR_+ une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$ (On précisera la demi tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \simeq 0,4$)

3) On désigne par (U_n) la suite définie sur IN^* par $U_n = \int_\alpha^1 |f(x)|^n \, dx$

a) Calculer U_1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

c) Montrer que le point $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C)

d) Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point I

2) a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t) \leq \frac{1}{2}$

b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente montrer que pour réel $x \geq 0$ on a : $f(x)) \leq \frac{1}{2}(x+1)$

c) Déterminer alors la position de (C) par rapport à T.

3) Tracer (C) et T

4) Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_{-1}^{0} \frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}} dt$

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive.

b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $I_n \leq \frac{1}{2n}$

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = ln(1 + \tan x)$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que $\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$

b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4}, ln2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8}, \frac{ln2}{2}\right)$ sont des points de (C).

(On donne $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$)

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = ln2 - f(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$)

b) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

On a représenté ci- dessous les points A et I dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) Tracer la courbe (C) en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite (OA) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite (OA) et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{8}$ et $x = \frac{\pi}{4}$

a) Justifier que S_1 et S_2 ont la même aire.

b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + \tan x)\,dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J.

c) Donner la valeur de $\int_0^{ln2} \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2}\,dx$.