

**Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = (x - 1)\sqrt{2x + 1}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- 2) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $-\frac{1}{2}$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.  
 b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]-\frac{1}{2}, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]-\frac{1}{2}, +\infty[$ .  
 c) Calculer alors  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)\sqrt{2x+1}-9}{x-4}$
- 3) a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
 b) En déduire que  $f$  admet un minimum absolu que l'on précisera.  
 c) Montrer alors que pour tout  $x \in [-\frac{1}{2}, 1[$  :  $\sqrt{2x + 1} \leq \frac{1}{1-x}$

**Exercice 2**

1) Soit  $f$  une fonction dérivable et strictement positive sur  $\mathbb{R}$  telle que la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 0 est  $\Delta: y = x + 4$ . Soit  $g$  la fonction définie par  $g = \sqrt{f}$  alors la tangente à  $C_g$  au point d'abscisse 0 a pour équation :

a)  $y = x + 2$

b)  $y = \frac{1}{2}x + 4$

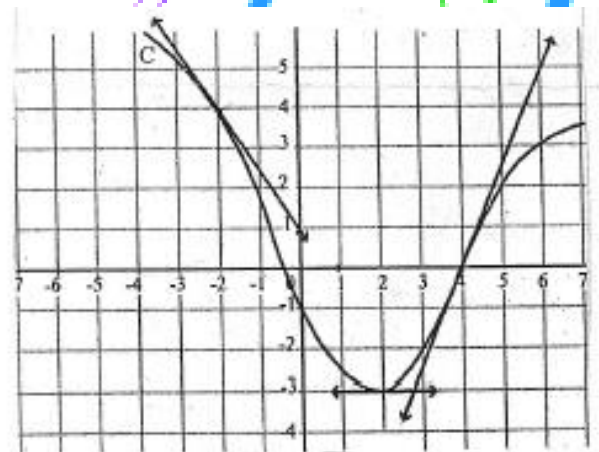
c)  $y = \frac{1}{4}x + 2$

2) Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f'(1) = 1$  et soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = f(2x - 1)$  alors : a)  $g$  n'est pas dérivable en 1    b)  $g'(1) = 2$     c)  $g'(1) = 1$

**Exercice 3**

Le graphique ci-contre représente une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et dérivable en  $-2$ ,  $2$  et  $4$ .

- 1) Déterminer graphiquement  $f(-2)$ ,  $f(2)$  et  $f(4)$ .
- 2) Déterminer graphiquement  $f'(-2)$ ,  $f'(2)$  et  $f'(4)$ .
- 3) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{f(x) - 4}$
- 4) En utilisant des approximations affines, donner une valeur approché des réels suivant :  $f(-1, 99)$  et  $f(4, 001)$ .



**Exercice 4**

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels. Soit  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Ci dessous on a représenté la partie de la courbe  $C_f$ .

correspondant à  $]-1, 2[$ .

- 1) a) Calculer graphiquement :  $f(0)$ ,  $f'(0)$  et  $f'(1)$ .  
 b) En déduire que pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  ;  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^5 + 32}{x-1}$

2) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Vérifier que pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ;  $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-2}$

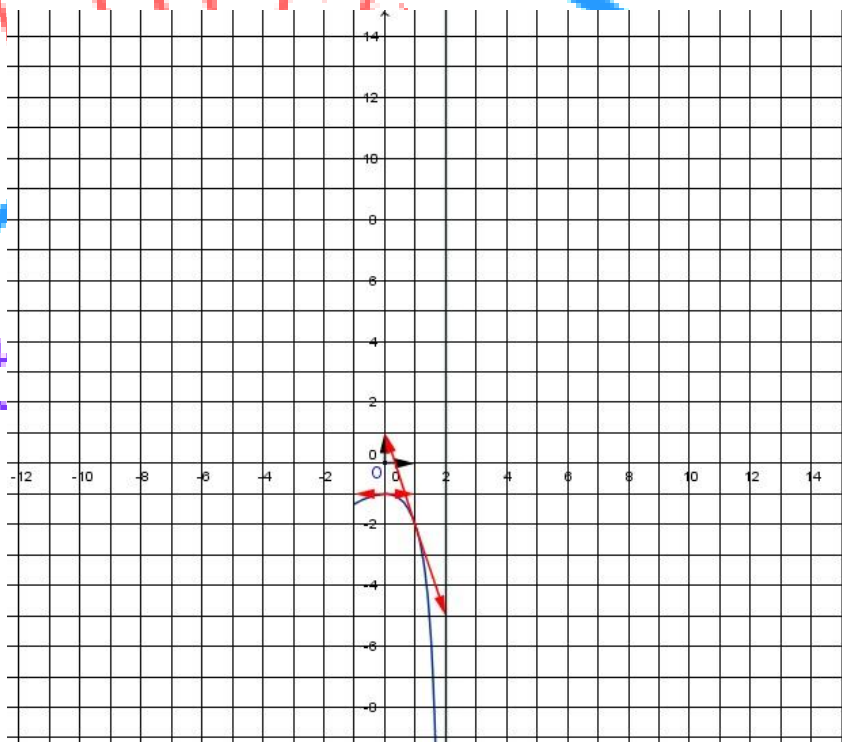
b) Déterminer les asymptotes à la courbe  $C_f$ .

4) Montrer que le point  $I(2, 3)$  est un centre de symétrie de  $C_f$

5) Compléter le traçage de la courbe  $C_f$

6) Discuter, graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le nombre de solutions de l'équation :

(E) :  $x^2 - m(x - 2) = x - 2$



**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+5}{x-2} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-1} + x - 7 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) a) Montrer que  $f$  est continue en 1

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1 et interpréter graphiquement les résultats

2) a) Déterminer la fonction  $f'$  de  $f$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

3) Montrer que la courbe  $(C)$  de  $f$  admet une seule tangente  $(T)$  parallèle à la droite  $D : 3x - 4y + 4 = 0$  puis donner une équation de  $(T)$

4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$

**Exercice 6**

On donne ci-contre la courbe représentative  $(C)$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  ainsi que les tangentes à  $(C)$  aux points d'abscisses 0 et 2.

1) a) Par lecture graphique, calculer

$f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f'(0)$  et  $f'(2)$ .

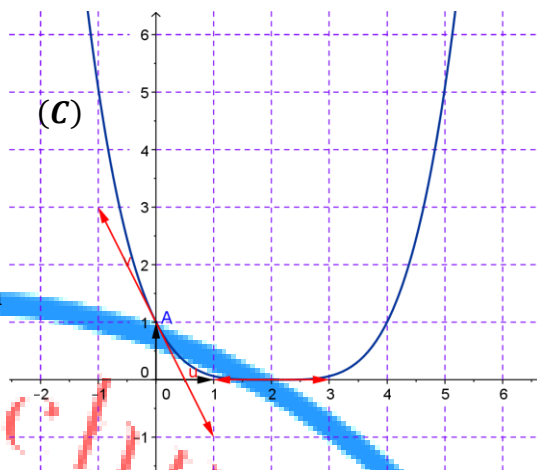
b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{f(x) - 1}$

c) En utilisant une approximation affine, donner une valeur approché du réel  $f(0,0001)$ .

2) On admet que :  $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = (ax + 1)^n$  où  $a$  est un réel et  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

b) En utilisant ce qui précède, calculer  $a$  et  $n$ .



### Exercice 7

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{3x}{2x-1}$  On désigne par  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ , et que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}; f'(x) = \frac{-3}{(2x-1)^2}$

2) Soit la droite  $\Delta: y = -3x$ .

a) Montrer qu'il existe deux tangentes  $T_1$  et  $T_2$  à  $C_f$  parallèles à la droite  $\Delta$ .

b) Donner une équation cartésienne de chacune des tangentes  $T_1$  et  $T_2$

3) Existe-t-il des tangentes à  $C_f$  passant par le point  $A(2, 0)$  ?

### Exercice 8

Dans la figure ci-dessous on a représenté graphiquement la courbe  $(C)$  d'une fonction  $f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . La droite  $\Delta: y = \frac{1}{2}x + 1$  est une asymptote à  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$  et la droite  $\Delta': y = 1$  est une asymptote à  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

1) Justifier la dérivabilité de  $f$  en 0 et donner  $f'(0)$ .

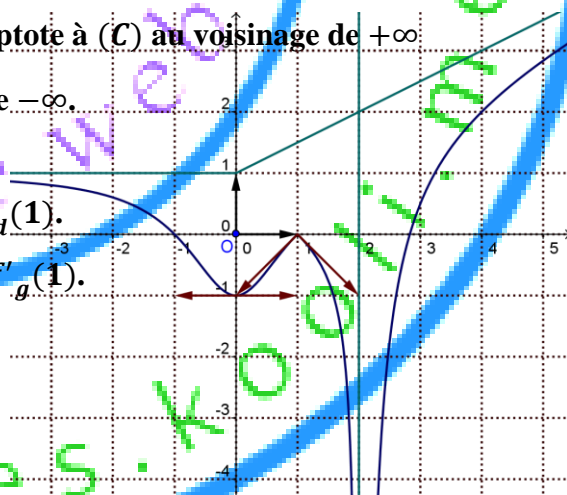
2) a) Justifier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1 et donner  $f'_d(1)$ .

b) Justifier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 1 et donner  $f'_g(1)$ .

c) La fonction  $f$  est-elle dérivable en 1 ? Pourquoi ?

3) Donner les asymptotes à la courbe  $(C)$

4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$



### Exercice 9

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = mx^2 + 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

où  $m$  est un paramètre réel.

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (on distinguera trois cas :  $m > 0$ ;  $m < 0$  et  $m = 0$ )

- 3) Montrer que  $f$  est continue sur chacun des intervalles :  $]-\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
- 4) Pour quelle valeur de  $m$  ;  $f$  est continue en 1 ?
- 5) Dans la suite de l'exercice on prend  $m = 1$ .
  - a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1.
  - b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 1.
  - c) la fonction  $f$  est-elle dérivable en 1 ?
- 6) a) Justifier la dérivabilité de  $f$  en tout réel  $x \in ]-\infty, 1[$  et calculer  $f'(x)$ .  
 b) Justifier la dérivabilité de  $f$  en tout réel  $x \in ]1, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .
- 7) Donner une équation cartésienne de la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse .
- 8) Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $A$  le point de  $(C)$  d'abscisse  $a$ . Déterminer le point  $A$  pour que la tangente  $T$  à  $(C)$  en  $A$  soit parallèle à la droite  $\Delta: y = -\frac{x}{2} + 1$ .

### Exercice 10

I/ Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$  On désigne par  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  on a  $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$
- 2) a) Déterminer les points de  $C_f$  où la tangente est parallèle à la droite  $(O, \vec{i})$ .  
 b) Déterminer les points de  $C_f$  où la tangente est parallèle à la droite  $\Delta: y = -3x + 1$

III/ Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $g$  est continue en 0.
- 2) Etudier la dérivabilité de  $g$  en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
- 3) a) Justifier que  $g$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  et calculer  $g'(x)$  sur chacun de ces intervalles.  
 b) Déterminer le signe de  $g'(x)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .  
 c) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 4) Déterminer les extrémums de  $g$  et préciser leurs natures.

### Exercice 11

La courbe  $C_f$  ci-dessous représentée est la courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$

\* La droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - 4$  est une asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

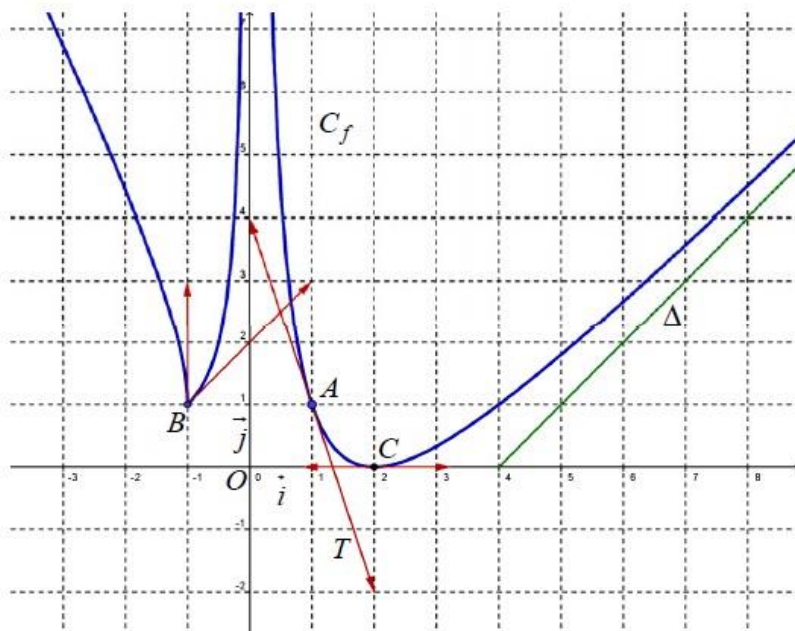
\* La droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote à  $C_f$ .

\* La droite  $T$  est la tangente à  $C_f$  au point  $A$ .

\* La courbe  $C_f$  admet deux demi tangentes au point  $B$  et une tangente horizontale au point  $C$ .

- 1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$
- 2) a) Déterminer  $f'(1)$  ;  $f'(2)$  et  $f'_d(-1)$

- b) Donner une approximation affine de  $f(0,998)$
- 3) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-1}{x+1}$
- 4) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, 2[$  par  $g(x) = \sqrt{f(x)} + x$
- a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$
- b) Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de  $g$  au point d'abscisse 1.



### Exercice 12

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x+1}{2x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative

- 1) a) Montrer que  $f$  est continue sur chacun des intervalles  $]-\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$   
 b) Etudier la continuité de  $f$  en 1.  
 c) Donner alors le domaine de continuité de  $f$ .
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
- 3) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 1.  
 b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1.  
 c) La fonction  $f$  est-elle dérivable en 1 ?
- 4) En déduire le domaine de dérivabilité de  $f$ .
- 5) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

### Exercice 13

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1+x^2}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 + x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par  $C_f$  sa courbe.

- 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .  
 b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$   
 c) Montrer que la droite  $y = -x - 1$  est une asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$ .
- 2) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche et à droite en 0. Conclure.  
 b) Interpréter les résultats obtenus graphiquement.  
 c) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- 4) Ecrire les équations cartésiennes des demi tangentes  $T_1$  et  $T_2$  à  $C_f$  au point d'abscisse 0.

#### Exercice 14

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + bx - 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2\sqrt{x} - x + b + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} \quad b \in \mathbb{R}$$

- 1) Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$
- 2) a) Montrer que  $f$  est continue sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$   
 b) Déterminer  $b$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Dans la suite de l'exercice on prend  $b = -2$ .  
 a) Montrer que  $f$  est dérivable à gauche en 0 puis donner une équation cartésienne de la demi-tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 0.  
 b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 4) a) Montrer que  $f$  est dérivable au point  $a = 4$ .  
 b) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse 4.  
 c) Déterminer le réel  $m$  pour que  $T$  soit perpendiculaire à la droite  $\Delta_m: mx - 2y + 1 = 0$
- 5) Soit  $a \in ]-\infty, 0[$ .  
 a) Calculer  $f'(a)$  puis écrire une équation de la tangente  $T'$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $a$ .  
 b) Montrer qu'il existe une seule tangente à  $C_f$  passant par le point  $A(0, -5)$   
 c) Donner une équation de cette tangente.