**Fonction dérivée 3ème Sc Expérimentales**

## Exercice 1

Déterminer dans chaque cas la fonction dérivée de la fonction $f$ indiquée tout en précisant le domaine de dérivabilité de $f$.

$f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5$ ; $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ ; $f(x) = \dfrac{-x^2+3x-1}{x+1}$ ; $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+1}$

$f(x) = -3\sqrt{-2x+3}$ ; $f(x) = \dfrac{-3}{x^2-4}$ ; $f(x) = \dfrac{4}{(-x^2+1)^3}$ ; $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

$f(x) = \sqrt{-2x^2+3x-1}$ ; $f(x) = (-3x^2+2x)^4$ ; $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$ ; $f(x) = \sqrt{3x+1}$

$f(x) = 2(x^3+2x)^3$ ; $f(x) = (x^2-x)\sqrt{-x^2+9}$ ; $f(x) = (x^2+x)^3(-x^2+1)^4$

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{2x+1}$

**1)** Déterminer le domaine de définition de $f$.

**2)** **a)** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en $-\frac{1}{2}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**b)** Montrer que $f$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

**c)** Calculer alors $\lim\limits_{x\to 4} \frac{(x-1)\sqrt{2x+1}-9}{x-4}$

**3)** **a)** Dresser le tableau de variation de $f$.

**b)** En déduire que $f$ admet un minimum absolu que l'on précisera.

**c)** Montrer alors que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right[$ : $\sqrt{2x+1} \leq \frac{1}{1-x}$

## Exercice 3

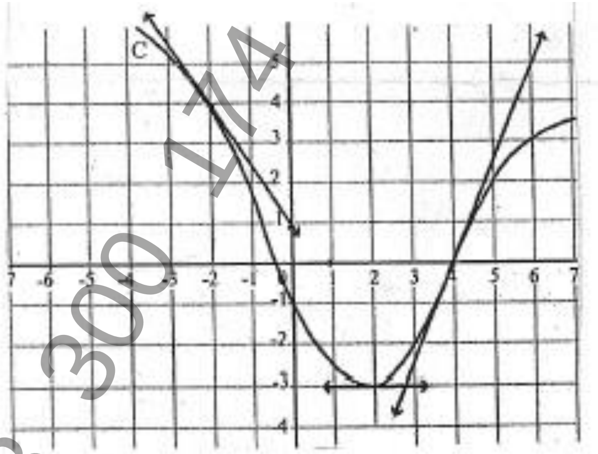
**1)** Soit $f$ une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 0 est $\Delta$: $y = x + 4$. Soit $g$ la fonction définie par $g = \sqrt{f}$ alors la tangente à $C_g$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

a) $y = x + 2$ b) $y = \frac{1}{2}x + 4$ c) $y = \frac{1}{4}x + 2$

**2)** Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(1) = 1$ et soit $g$ la fonction définie par : $g(x) = f(2x-1)$ alors : a) $g$ n'est pas dérivable en 1 b) $g'(1) = 2$ c) $g'(1) = 1$

## Exercice 4

Le graphique ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en $-2$ , $2$ et $4$.




**1)** Déterminer graphiquement $(-2)$ , $f(2)$ et $f(4)$.

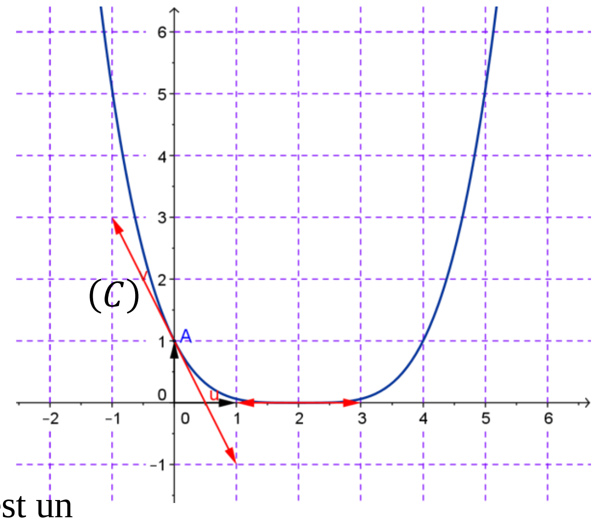
**2)** Déterminer graphiquement $'(-2)$ , $f'(2)$ et $f'(4)$.

**3)** Déterminer $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{f(x)-4}$

**4)** En utilisant des approximations affines, donner une valeur approché des réels suivant : $f(-1{,}99)$ et $f(4{,}001)$.

## *Exercice 5*

On donne ci-contre la courbe représentative $(C)$ d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à $(C)$ aux points d'abscisses $0$ et $2$.




**1) a)** Par lecture graphique, calculer $f(0)$ , $f(2)$ , $f'(0)$ et $f'(2)$.

**b)** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{f(x)-1}$

**c)** En utilisant une approximation affine, donner une valeur approché du réel $f(0{,}0001)$.

**2)** On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f(x) = (ax+1)^n$ où a est un Réel et $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

**a)** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**b)** En utilisant ce qui précède, calculer $a$ et $n$.

## *Exercice 6*

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{2x-1}$ On désigne par $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1)** Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ; $f'(x) = \frac{-3}{(2x-1)^2}$

**2)** Soit la droite $\Delta$: $y = -3x$.

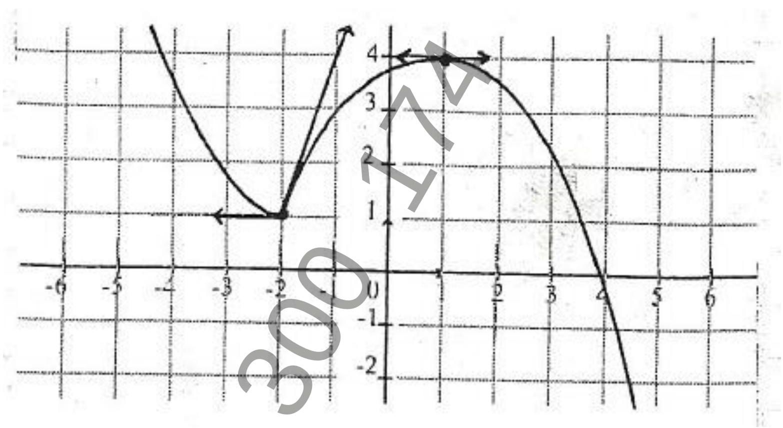
**a)** Montrer qu'il existe deux tangentes $T_1$ et $T_2$ à $C_f$ parallèles à la droite $\Delta$.

**b)** Donner une équation cartésienne de chacune des tangentes $T_1$ et $T_2$

**3)** Existe-t-il des tangentes à $C_f$ passant par le point $A(2, 0)$ ?

## *Exercice 7*

Le graphique ci-dessous représente une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.



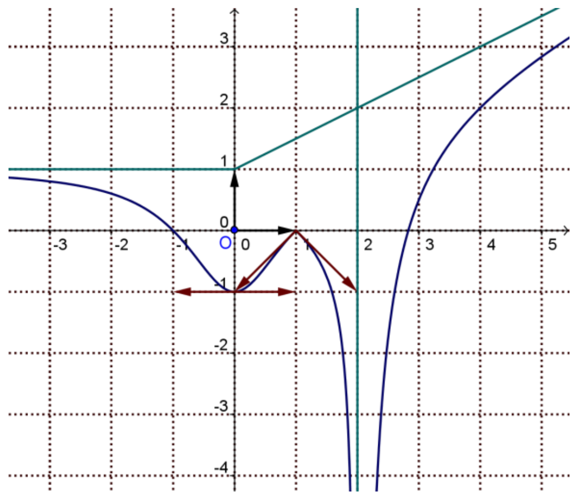

**1)** La fonction $f$ est-elle dérivable en $-2$ ?

**2)** Déterminer graphiquement $f_g'(-2)$ ; $f_d'(-2)$ et $f'(1)$

**3)** Dresser le tableau de variation de $f$.

## Exercice 8

Dans la figure ci-contre on a représenter graphiquement la courbe $(C)$d'une fonction $f$ dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La droite $\Delta$: $y = \frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote à $(C)$ au voisinage de $+\infty$ et la droite $\Delta'$: $y = 1$ est une asymptote à $(C)$ au voisinage de $-\infty$.




**1)** Justifier la dérivabilité de $f$ en 0 et donner $f'(0)$.

**2) a)** Justifier la dérivabilité de $f$ à droite en 1 et donner $f'_d(1)$.

**b)** Justifier la dérivabilité de $f$ à gauche en 1 et donner $f'_g(1)$.

**c)** La fonction $f$ est-elle dérivable en 1 ? Pourquoi ?1

**3)** Donner les asymptotes à la courbe $(C)$

**4)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) + x)$

## Exercice 9

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} + 1 & si\ x \le 1 \\ f(x) = mx^2 + 2x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$

où m est un paramètre réel.

**1)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

**2)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ( On distinguera trois cas : $m > 0$ , $m < 0$ et $m = 0$ ).

**3)** Montrer que $f$ est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

**4)** Pour quelle valeur de $m$ ; $f$ est continue en 1 ?

**5)** Dans la suite de l'exercice on prend $m = 1$.

**a)** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 1.

**b)** Etudier la dérivabilité de $f$ à gauche en 1.

**c)** la fonction $f$ est-elle dérivable en 1 ?

**6)** **a)** Justifier la dérivabilité de $f$ en tout réel $x \in ]-\infty\,,1[$. et calculer $f'(x)$.

**b)** Justifier la dérivabilité de $f$ en tout réel $x \in ]1\,,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

**7)** Donner une équation cartésienne de la tangente à $(C)$ au point d'abscisse 0 .

**8)** Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $A$ le point de $(C)$ d'abscisse $a$. Déterminer le point $A$ pour que la tangent $T$ à $(C)$ en $A$ soit parallèle à la droite $\Delta\colon y = -\frac{x}{2} + 1$.

## Exercice 10

**I/** Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$ On désigne par $C_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

**1)** Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ on a $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

**2)** **a)** Déterminer les points de $C_f$ où la tangente est parallèle à la droite $(O\,,\vec{\imath}\,)$.

**b)** Déterminer les points de $C_f$ où la tangente est parallèle à la droite $\Delta\colon y = -3x + 1$

**II/** Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \leq 0 \\ g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & si \quad x > 0 \end{cases}$

**1)** Montrer que $g$ est continue en 0.

**2)** Etudier la dérivabilité de $g$ en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

**3)** **a)** Justifier que $g$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$ et calculer $g'(x)$ sur chacun de ces intervalles.

**b)** Déterminer le signe de $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$.

**c)** Dresser le tableau de variation de $g$.

**4)** Déterminer les extrémums de g et préciser leurs natures.

## Exercice 11

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x+1}{2x-1} & si \quad x > 1 \\ f(x) = x^2 + 3 & si \quad x \leq 1 \end{cases}$

On désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative

**1)** **a)** Montrer que $f$ est continue sur chacun des intervalles$]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$

**b)** Etudier la continuité de $f$ en 1.

**c)** Donner alors le domaine de continuité de $f$.

**2)** Montrer que $f$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$.

**3)** **a)** Etudier la dérivabilité de $f$ à gauche en 1.

**b)** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 1.

**c)** La fonction $f$ est –elle dérivable en 1 ?

**4)** En déduire le domaine de dérivabilité de $f$.

5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

## Exercice 12

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1+x^2}{1-x} & si\ x < 0 \\ f(x) = 1 + x\sqrt{x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par $C_f$ sa courbe.

**1)** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

**b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

**c)** Montrer que la droite $y = -x - 1$ est une asymptote à $C_f$ au voisinage de $-\infty$.

**2)** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**3)** **a)** Etudier la dérivabilité de $f$ à gauche et à droite en 0. Conclure.

**b)** Interpréter les résultats obtenus graphiquement.

**c)** Calculer $f'(x)$ pour tout $\in \mathbb{R}^*$ .

**4)** Ecrire les équations cartésiennes des demi tangentes $T_1$ et $T_2$ à $C_f$ au point d'abscisse 0.

## Exercice 13

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 + bx - 1 & si\ x < 0 \\ f(x) = 2\sqrt{x} - x + b + 1 & si\ x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$ $\quad b \in \mathbb{R}$

**1)** Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$

**2)** **a)** Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$

**b)** Déterminer $b$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

**3)** Dans la suite de l'exercice on prend $b = -2$.

**a)** Montrer que $f$ est dérivable à gauche en 0 puis donner une équation cartésienne de la demi-tangente à $C_f$ au point d'abscisse 0.

**b)** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**4)** **a)** Montrer que $f$ est dérivable au point $a = 4$.

**b)** Ecrire une équation de la tangente $T$ à $C_f$ au point d'abscisse 4.

**c)** Déterminer le réel $m$ pour que $T$ soit perpendiculaire à la droite $\Delta_m : mx - 2y + 1 = 0$

**5)** Soit $a \in ]-\infty, 0[$.

**a)** Calculer $f'(a)$ puis écrire une équation de la tangente $T'$ à $C_f$ au point d'abscisse $a$.

**b)** Montrer qu'il existe une seule tangente à $C_f$ passant par le point A(0 , -5)

**c)** Donner une équation de cette tangente.

## Exercice 14

La courbe ci-contre représentée est la courbe d'une fonction . Par lecture graphique répondre aux questions suivantes.

**1)** $D_f = \cdots$

**2)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

**3)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

**4)** $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

**5)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

**6)** $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)+2}{x-1}$

**7)** Le domaine de continuité de $f$ est

**8)** Le domaine de dérivabilité de $f$ est

8) $f'_g(-2)$

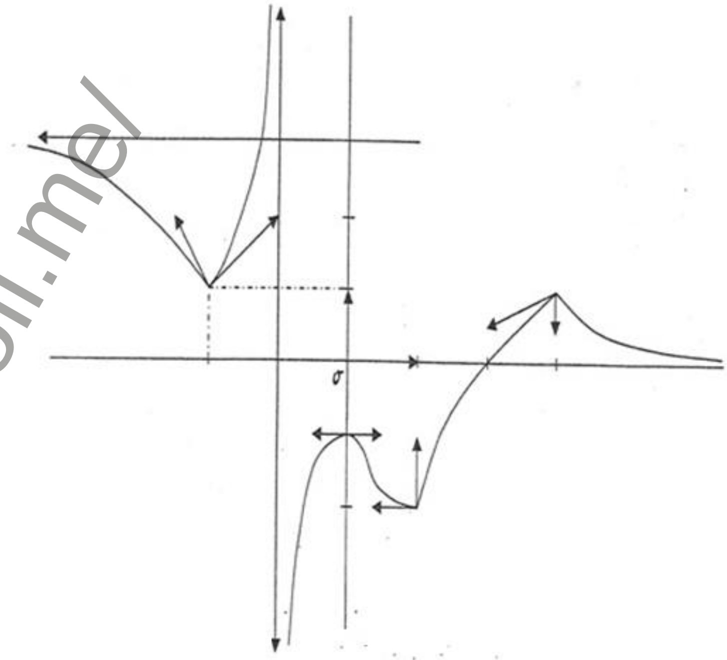
9) $f'_d(-2)$

10) $f'(0)$

11) $f'_g(1)$

12) $f'_g(3)$

13) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{f(x)-1}{x-3}$



## Exercice 15

La courbe $C_f$ ci-dessous représentée est la courbe d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$

* La droite $\Delta$ d'équation $y = x - 4$ est une asymptote à $C_f$ au voisinage de $+\infty$.

* La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à $C_f$.

* La droite $T$ est la tangente à $C_f$ au point $A$.

* La courbe $C_f$ admet deux demi tangentes au point $B$ et une tangente horizontale au point $C$ .

**1)** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$

**2)** **a)** Déterminer $f'(1)$ ; $f'(2)$ et $f'_d(-1)$

**b)** Donner une approximation affine de $f(0{,}998)$

**3)** Déterminer $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x)-1}{x+1}$

**4)** Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,,2[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)} + x$

**a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$

**b)** Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de $g$ au point d'abscisse 1.