❄ LYCÉE 18 JANVIER DJEBNIANA ❄

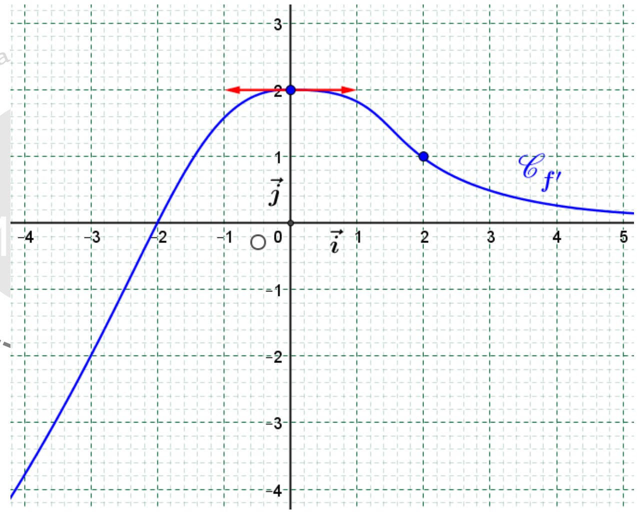
SÉRIE N°19

Thème: Fonctions dérivée	
Niveau: Troisième Maths	Année Scolaire: 2022-2023

Prof : ✍ BenMbarek Mahmoud ✍

Exercice 1 ★★★

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-3) = 2$.
Le graphique ci-contre représente la courbe représentative de sa fonction dérivée f' dans un repère orthonormé.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.



1. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse (-3).
2. Donner une approximation affine de $f(-2.999)$.
3. Ordonner dans l'ordre croissant les réels $f(1,5)$, $f(1,6)$ et $f(1,7)$.
4. Montrer que la fonction f admet un minimum local à préciser.
5. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est-elle horizontale?

Exercice 2 ★★★

Dresser dans chaque cas le tableau de variation de la fonction f et déterminer éventiellement les extréma locaux.

- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
- $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$
- $f(x) = \dfrac{6(x+1)}{x^2+3}$
- $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$

Exercice 3 ★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ où a, b et c trois réels.

Déterminer les réels a, b et c sachant que f admet deux extréma locaux en -1 et en 3 et la tangente au point d'abscisse 0 parallèle à la droite $\Delta : 3x - y + 1 = 0$.

Exercice 4 ★★★

I- Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$(Unité 4 cm).

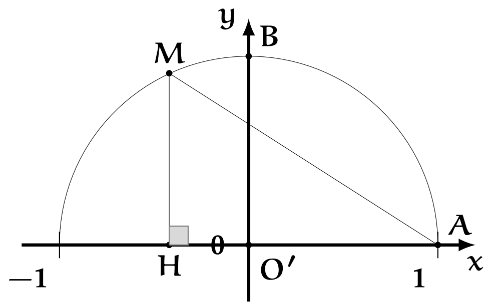
1. Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à a gauche en 1.
Interpréter graphiquement les résultats.

2. a) Vérifier que pour tout $x \in]-1;1[$, on a: $f'x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Tracer $\mathscr{C}_f$.

II-
Le graphique ci-contre représente un demi-cercle de centre O' et de rayon 1 dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O', \vec{u}, \vec{v})$. A le point de coordonnées $(1,0)$. B le point de coordonnées $(0,1)$. Soit M un point du demi cercle d'abscisse x différent de (-1) et de 1. H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du triangle AHM.

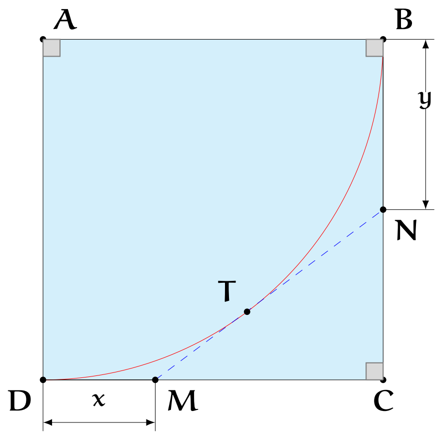


1. Exprimer $\mathscr{A}(x)$ à l'aide de x.

2. Déterminer la position du point M pour que l'aire du triangle AHM soit maximale.

Exercice 5 ★★★

Soit $ABCD$ un carré de coté 1. $\mathscr{C}$ est le quart du cercle de centre A et de rayon AB contenu dans le carré. T est un point de $\mathscr{C}$ distinct de B et D. La tangente à $\mathscr{C}$ en T coupe le segment $[BC]$ en N et le segment $[DC]$ en M.
On note $x = DM$ et $y = BN$.



1. a) Montrer que $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$.

   b) Montrer que $MN = x + y$.

   c) Exprimer alors y en fonction de x.

2. Soit f la fonction définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.

   a) Etudier les variations de f.

   b) Pour quelle position du point M, la longueur MN est-elle minimale et calculer cette distance ?

Exercice 6 ★★★

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{8}{x}$ et g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 6$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit A un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et B un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse b.

   a) Ecrire une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ en A.

   b) Ecrire une équation de la tangente (T') à $\mathscr{C}_g$ au point B.

   c) Montrer que (T) et (T') sont confondues si et seulement si $\begin{cases} (a-2)^2(3a^2+4a+4) = 0 \\ b = \frac{8}{a^2} \end{cases}$

d En déduire que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une seule tangente commune Δ.

2 a Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

b Etudier la position relative de $\mathscr{C}_g$ et Δ.

c Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 7 ★

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=1+2x\sqrt{x}-\frac{3}{2}x^2$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 Montrer que f est dérivable à droite en 0.

2 a Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que pour tout $x\in[0;+\infty[$, on a $f'(x)=3\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)$.

b Dresser le tableau de variation de f.

3 Ecrire une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

4 Montrer que pour tout réel $x\in[0;+\infty[$, on a: $f'(x)\leqslant\frac{3}{4}$.

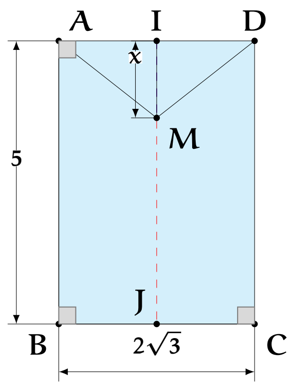
5 Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-\left(\frac{3}{4}x+\frac{31}{32}\right)$.

a Dresser le tableau de variation de g.

b En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (T).

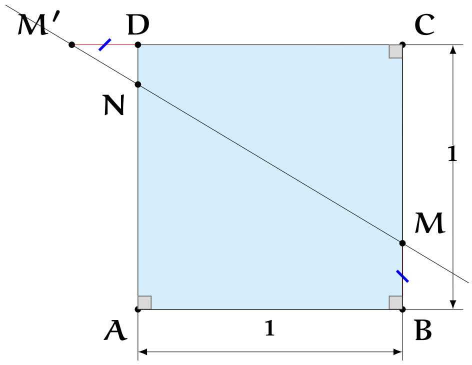
Exercice 8 ★★★

Dans la figure ci-contre $ABCD$ est un rectangle de dimensions $AB=5$ et $AD=2\sqrt{3}$.
I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$.
M est un point de $[IJ]$.
On pose $IM=x$.
Déterminer x pour que la somme $AM+DM+JM$ soit **minimale**.



Exercice 9 ★★★

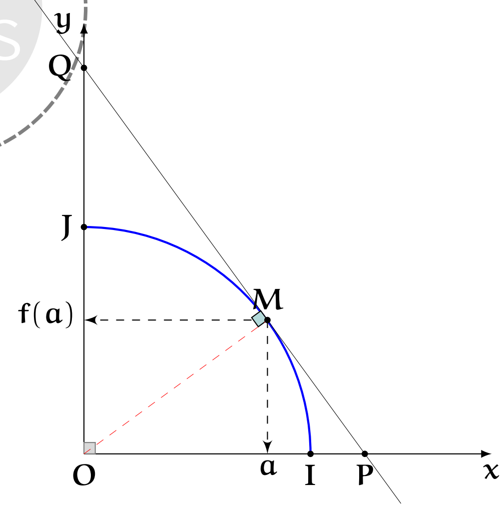
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{-x^2+x}{x+1}$.
dresser le tableau de variation de f.



2. Dans le graphique ci-contre $ABCD$ est un carré de coté 1. M est un point du segment $[BC]$ distinct de B et C. M' est un point de la demi-droite $[CD)$ privée du segment $[DC]$ tel que $DM'=BM$. N est le point d'intersection de la droite (MM') et du segment $[AD]$.
   a. Montrer que $f(BM)=DN$.
   b. Construire un autre carré $ABCD$ de coté 1 et le point N lorsque la distance DN est **maximale**.

Exercice 10 ★★★

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Dans le graphique ci-contre, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ de la restriction de la fonction $f:x\mapsto 1-x^2$ sur $[0;1]$.
Soit a un réel de $]0;1[$ et (T) la tangente à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse a.



1. Ecrire une équation de (T).
2. (T) coupe l'axe des abscisses en un point P et l'axe des ordonnées en un point Q.
   a. Déterminer les coordonnées de P et Q.
   b. Montrer que l'aire du triangle OPQ est $\dfrac{(a^2+1)^2}{4a}$
3. Soit g la fonction définie sur $]0;1[$ par $g(x)=\dfrac{(x^2+1)^2}{4x}$.
   a. Montrer que pour tout $x\in\,]0;1[$ on a:
   $g'(x)=\dfrac{(x^2+1)(3x^2-1)}{4x^2}$.
   b. Dresser le tableau de variation de g.
   c. Pour quelle valeur de a, l'aire du triangle OPQ est-elle **minimale** ?

Exercice 11 ★★★

Dans la figure ci-contre $\mathscr{C}$ est un demi-cercle de diamètre $[AB]$ $(AB=6)$.

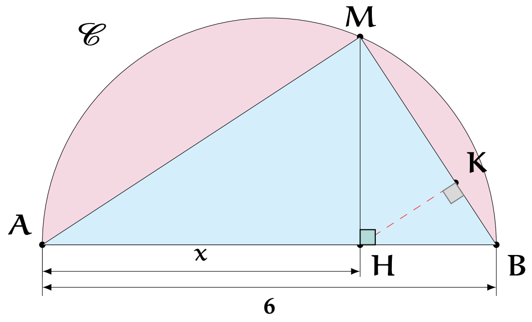
H est un point du segment $[AB]$ distinct de A et B.
On note x la distance AH.
La perpendiculaire en H à (AB) coupe $\mathscr{C}$ en M.
K est le pied de la hauteur issue de H dans le triangle MHB.
On se propose de déterminer la position du point H sur $[AB]$ pour laquelle la distance HK est **maximale**.
On note $HK=f(x)$

1 a Montrer que $AM = \sqrt{6x}$.

b Montrer que $f(x) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}$.

2 a Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $]0;6[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}$.

b Conclure.



La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques

[Blaise Pascal]

BenMbarek Mahmoud