Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + e^x - xe^x$. On note (C_f) sa courbe représentative.

1) Dresser le tableau de variation de f.

a) Justifier que la restriction g de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 2]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$, une solution unique α .

c) Vérifier que $1 < \alpha < 1,5$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat .

b) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite Δ: $y = x$.

c) Tracer (C_f) et Δ .

3) On note g^{-1} la fonction réciproque de g et (C') sa courbe représentative. Tracer (C').

4) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x + (2 - x)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}ln(1 + e^{-x})$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de f.

c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}ln(1 + e^x)$.

d) En déduire que la droite Δ: $y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.

Etudier la position relative de (C_f) et Δ.

e) Tracer (C_f) et Δ.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

b) En déduire que tout $x \geq 0$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x)e^{-x}$ On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. .

b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = -xe^{-x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) **Tracer la courbe (C).**

3) **Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = -(x+2)e^{-x}$, montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.**

Exercice 4

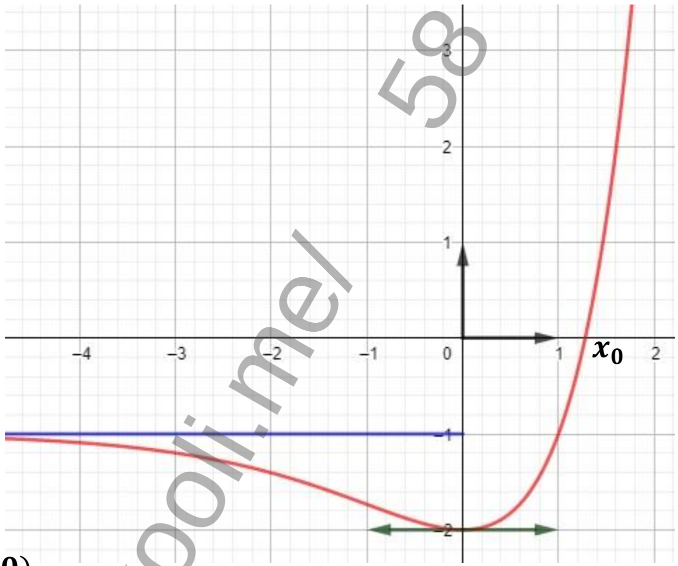
1) **La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.**

On sait que :

*** La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.**

*** La courbe (Γ) admet une seule tangente horizontale.**

*** La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$ en un unique point x_0.**



En utilisant le graphique :

a) **Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.**

b) **Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.**

2) **La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (\alpha x + \beta)e^x - 1$ où α et β sont deux réels.**

a) **Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de α et β.**

b) **Déduire, en utilisant 1)a), que pour tout réel x on a : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.**

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

3) **a)** **Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat .**

b) **Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.**

c) **Justifier que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$**

4) **a)** **Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

b) **Dresser le tableau de variation de f.**

c) **Montrer que $f(x_0) = \frac{1}{x_0-1}$.**

d) **Tracer (C_f). (On prendra $x_0 = 1,2$).**

Exercice 5

On a représente ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe (C) d'une fonction f définie, continue,

dérivable et strictement décroissante sur $[0\,,+\infty[$.

On sait que la courbe (C) :

*** admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$.**

*** atteint son maximum au point d'abscisse 0.**

1) Par lecture graphique :

a) Déterminer (0) , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $f'_d(0)$ (nombre dérivé à droite en 0)

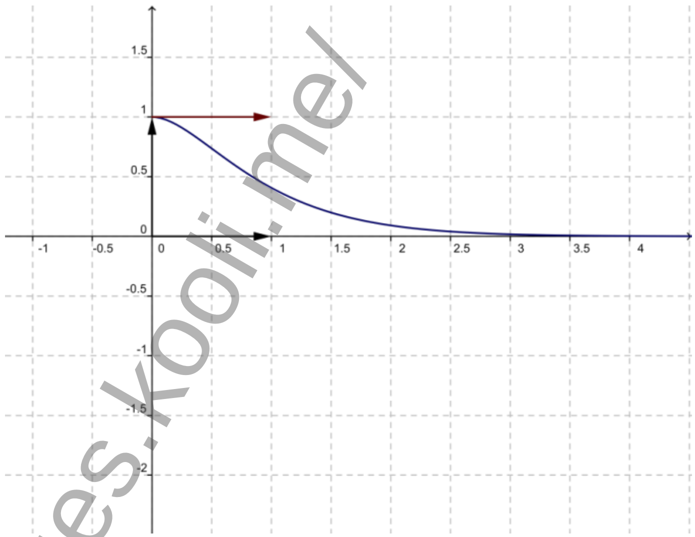
b) Montrer que f est une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1} réciproque de f.

On note β l'abscisse du point d'intersection des deux courbes (C) et (C').

3) On sait que la fonction f est définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)e^{-2x}$ où a et b sont deux réels.

4) En utilisant 1) a) montrer que pour tout x de $[0\,,+\infty[$; $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$.



Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^{x} & si\ \ x \le 0 \\ f(x) = x - x\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative (unité graphique $2\ cm$).

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 est que le nombre dérivé à gauche en 0 est 2.

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Etudier les variations de f sur $]-\infty\,,0[$ puis sur $]0\,,+\infty[$.

b) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Préciser pour tout réel ≤ 0 , la position de (C) par rapport à Δ.

c) Préciser pour tout réel > 0 , la position de (C) par rapport à $\Delta' : y = x$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (C) au point $A(e\,,0)$.

4) Tracer Δ , Δ' , T et (C).

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1\,,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par (C') la courbe représentative de g^{-1}.

b) Vérifier que la droite T définie dans A)3)d) est tangente à la courbe (C') au point $B(0\,,e)$.

c) Tracer (C').

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]0\,,1[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f possède une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

2) On désigne par (C) la courbe de g (Unité graphique $4cm$).

a) Montrer que (C) est symétrique par rapport au point $I\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de g.

c) Vérifier que $I \in (C)$ et montrer que la tangente T à (C) en I a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) \leq \frac{1}{4}$.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = g(x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

a) Etudier le sens de variation de h.

b) Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4) Etudier la position de (C) et T.

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $0,5 < \alpha < 0,75$.

b) Tracer (C) et T et la courbe (C') de f.

6) Soit G la primitive de g tel que $G(0) = \ln 2$ et $F: x \mapsto \ln(g(x))$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $F(x) = x - G(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de F.

c) Montrer que la droite $D : y = x$ est asymptote à la courbe Γ de F au voisinage de $-\infty$.

d) Préciser la position de Γ par rapport à D. Tracer Γ.

Exercice 8

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1) a) Etudier les variations de g.

b) Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) \geq 0$.

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x - 2e^x x + x$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Montrer que la droite Δ: $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Préciser la position de (C) par rapport à la droite Δ.

3) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = e^x g(-x)$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer la courbe (C) en précisant la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$ et soit (C) sa courbe représentative (Unité $2\ cm$)

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point I de (C) d'abscisse 0 est un centre de symétrie de (C).

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point I.

3) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$.

a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1,6 < \alpha < 1,7$

c) Etudier alors les position relatives de (C) et la droite $\Delta: y = x$.

4) Construire (C) , T et Δ.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,,2[$.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ $\forall x \in]0\,,2[$.

c) Construire la courbe (C') représentative de f^{-1} dans le même repère.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \frac{1}{1+e^x}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite $\Delta_1: y = x$ et la droite $\Delta_2: y = x - 1$ sont asymptotes à la courbe (C).

b) Préciser les positions de (C) par rapport à Δ_1 et Δ_2.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR et en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α α et que $0,3 < \alpha < 0,5$.

b) Vérifier que $e^\alpha + 1 = \frac{1}{\alpha}$.

4) a) Montrer que $I\left(0\,,-\frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (C) au point I.

c) Montrer que la tangente T coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 0,4.

5) Tracer Δ_1 , Δ_2 , T et (C) (On prendra $\alpha \simeq 0,45$).

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = e^{2x}(e^x - 1)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \geq 1$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2$.

b) Etudier alors la position de (C) par rapport à la droite Δ: $y = 2$.

c) Etudier les branches infinies de (C)

d) Tracer (C) et Δ.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[1, +\infty[$.

b) Construire dans le même repère la courbe (C') de g^{-1}.

4) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{x} + 2x$.

a) Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de F.

c) Montrer que l'équation $F(x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0 < \alpha < \ln 4$.

Exercice 12

A) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = e^{x} - x - 2$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) a) En déduire qu'il existe un seul réel α tel que $g(\alpha) = 0$ et tel que $< \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.

B) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que pour tout réel positif x on a : $f'(x) = \frac{e^{x}}{(1+xe^{x})^{2}} \times g(x)$.

b) Vérifier que pour tout réel positif x on a : $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Vérifier que $(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Préciser une équation cartésienne de la demi tangente T à la courbe (C) au point O.

b) Tracer (C) et T (On prendra $\alpha \simeq 1,1$).