**Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.**

***Exercice 1***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + e^x - xe^x$. On note $(C_f)$ sa courbe représentative.

1) Dresser le tableau de variation de $f$.

a) Justifier que la restriction $g$ de $f$ à l'intervalle $[0, +\infty[$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 2]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$, une solution unique $\alpha$ .

c) Vérifier que $1 < \alpha < 1{,}5$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement le résultat .

b) Etudier la position relative de la courbe $(C_f)$ et la droite $\Delta : y = x$.

c) Tracer $(C_f)$ et $\Delta$ .

3) On note $g^{-1}$ la fonction réciproque de $g$ et $(C')$ sa courbe représentative. Tracer $(C')$.

4) Vérifier que la fonction $F$ définie par $F(x) = x + (2 - x)e^x$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

***Exercice 2***

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2} ln(1 + e^{-x})$. On désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative.

1) a) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de $f$.

c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} ln(1 + e^x)$.

d) En déduire que la droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à $(C_f)$ en $-\infty$.

Etudier la position relative de $(C_f)$ et $\Delta$.

e) Tracer $(C_f)$ et $\Delta$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$.

b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

b) En déduire que tout $x \geq 0$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

***Exercice 3***

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 + x)e^{-x}$. On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = -xe^{-x}$ .

c) Dresser le tableau de variation de $f$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Tracer la courbe $(C)$.

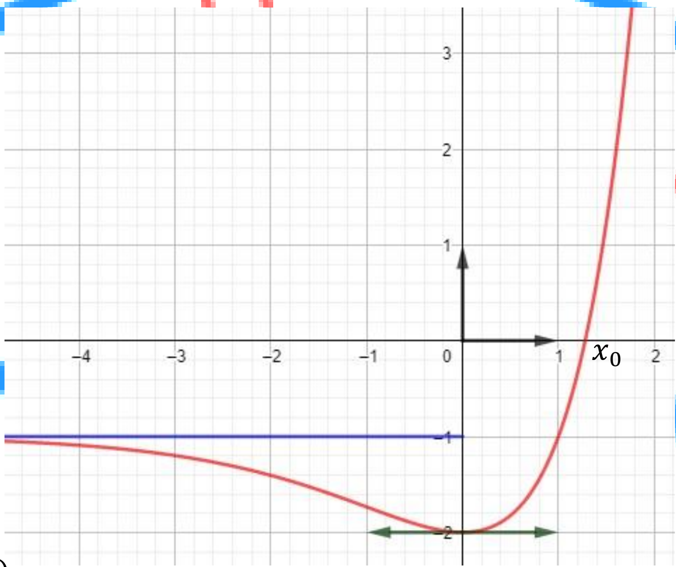
3) Soit la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = -(x+2)e^{-x}$ , montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

***Exercice 4***

1) La courbe $(\Gamma)$ ci-dessous est celle d'une fonction $g$ définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

* La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à $(\Gamma)$ au voisinage de $-\infty$.
* La courbe $(\Gamma)$ admet une seule tangente horizontale.
* La courbe $(\Gamma)$ coupe l'axe des abscisses $(O, \vec{\imath})$ en un unique point $x_0$.




En utilisant le graphique :

a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

b) Déterminer le signe de $g$ sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{x} - 1$ où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels.

a) Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$.

b) Déduire, en utilisant 1)a), que pour tout réel $x$ on a : $g(x) = (x-1)e^{x} - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{x}+1}{x}$

On désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Justifier que la courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{\jmath})$ au voisinage de $+\infty$

4) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de $f$.

c) Montrer que $f(x_0) = \frac{1}{x_0 - 1}$.

d) Tracer $(C_f)$. ( On prendra $x_0 = 1{,}2$ ).

***Exercice 5***

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^{x} & si\ x \le 0 \\ f(x) = x - x\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

Soit $(C)$ sa courbe représentative ( unité graphique 2 $cm$ ).

1) a) Montrer que $f$ est continue en 0.

b) Montrer que $f$ est dérivable à gauche en 0 est que le nombre dérivé à gauche en 0 est 2.

c) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Etudier les variations de $f$ sur $]-\infty\,,0[$ puis sur $]0\,,+\infty[$.

b) En déduire le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à $(C)$ au voisinage de $-\infty$.

b) Préciser pour tout réel $\leq 0$, la position de $(C)$ par rapport à $\Delta$.

c) Préciser pour tout réel $> 0$, la position de $(C)$ par rapport à $\Delta' : y = x$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente $T$ à la courbe $(C)$ au point $A(e\,,0)$.

4) Tracer $\Delta$, $\Delta'$, $T$ et $(C)$.

5) Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[1\,,+\infty[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on précisera. On désigne par $(C')$ la courbe représentative de $g^{-1}$.

b) Vérifier que la droite $T$ définie dans A)3)d) est tangente à la courbe $(C')$ au point $B(0\,,e)$.

c) Tracer $(C')$.

***Exercice 6***

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,,1[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

1) a) Dresser le tableau de variation de $f$.

b) Montrer que $f$ possède une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

2) On désigne par $(C)$ la courbe de $g$ ( Unité graphique $4cm$ ).

a) Montrer que $(C)$ est symétrique par rapport au point $I\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de $g$.

c) Vérifier que $I \in (C)$ et montrer que la tangente $T$ à $(C)$ en $I$ a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) \leq \frac{1}{4}$.

3) Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = g(x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

a) Etudier le sens de variation de $h$.

b) Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4) Etudier la position de $(C)$ et $T$.

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}75$.

b) Tracer $(C)$ et $T$ et la courbe $(C')$ de $f$.

6) Soit $G$ la primitive de $g$ tel que $G(0) = \ln 2$ et $F: x \mapsto \ln(g(x))$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $F(x) = x - G(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de $F$.

c) Montrer que la droite $D : y = x$ est asymptote à la courbe $\Gamma$ de $F$ au voisinage de $-\infty$.

d) Préciser la position de $\Gamma$ par rapport à $D$. Tracer $\Gamma$.

***Exercice 7***

On a représente ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $(C)$ d'une fonction $f$ définie, continue, dérivable et strictement décroissante sur $[0\,,+\infty[$.

On sait que la courbe $(C)$ :

* admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

* atteint son maximum au point d'abscisse 0.

1) Par lecture graphique :

   a) Déterminer $(0)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $f'_d(0)$ (nombre dérivé à droite en 0)

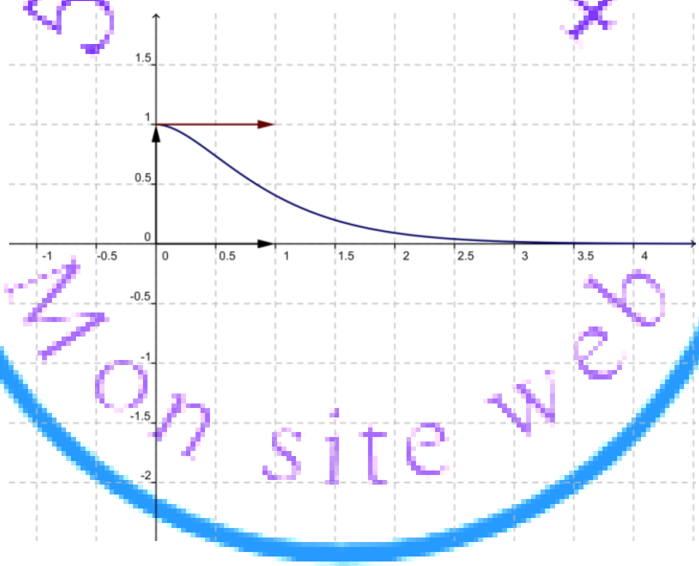
   b) Montrer que $f$ est une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Tracer la courbe $(C')$ de la fonction $f^{-1}$ réciproque de $f$.

On note $\beta$ l'abscisse du point d'intersection des deux courbes $(C)$ et $(C')$.

3) On sait que la fonction $f$ est définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)e^{-2x}$ où a et b sont deux réels.

4) En utilisant 1) a) montrer que pour tout x de $[0\,,+\infty[$; $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$.




***Exercice 8***

A) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1) a) Etudier les variations de $g$.

   b) Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) \geq 0$.

B) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x - 2e^x x + x$ et soit $(C)$ sa courbe représentative.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Montrer que la droite $\Delta$: $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $(C)$ au voisinage de $-\infty$.

   b) Préciser la position de $(C)$ par rapport à la droite $\Delta$.

3) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = e^x g(-x)$.

   b) En déduire que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Dresser le tableau de variation de $f$.

4) Tracer la courbe $(C)$ en précisant la tangente au point d'abscisse $0$.

***Exercice 9***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$ et soit $(C)$ sa courbe représentative ( Unité $2\ cm$ )

1) a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

c) Dresser le tableau de variation de $f$.

2) a) Montrer que le point $I$ de $(C)$ d'abscisse 0 est un centre de symétrie de $(C)$.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente $T$ à $(C)$ au point $I$.

3) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$.

a) Etudier les variations de $g$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha$ et que $1,6 < \alpha < 1,7$

c) Etudier alors les position relatives de $(C)$ et la droite $\Delta: y = x$.

4) Construire $(C)$ , $T$ et $\Delta$.

5) a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,,2[$.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ $\forall x \in ]0\,,2[$.

c) Construire la courbe $(C')$ représentative de $f^{-1}$ dans le même repère.

***Exercice 10***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \frac{1}{1+e^x}$ et soit $(C)$ sa courbe représentative.

1) a) Vérifier que pour tout réel $x$ on a : $f'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variation de $f$.

2) a) Montrer que la droite $\Delta_1: y = x$ et la droite $\Delta_2: y = x - 1$ sont asymptotes à la courbe $(C)$.

b) Préciser les positions de (C) par rapport à $\Delta_1$ et $\Delta_2$.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR et en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha$ α et que $0,3 < \alpha < 0,5$.

b) Vérifier que $e^\alpha + 1 = \frac{1}{\alpha}$.

4) a) Montrer que $I\left(0\,,-\frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $(C)$.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente $T$ à la courbe $(C)$ au point $I$.

c) Montrer que la tangente T coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 0,4.

5) Tracer $\Delta_1$ , $\Delta_2$ , $T$ et $(C)$ (On prendra $\alpha \simeq 0,45$ ).

***Exercice 11***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2$ et soit $(C)$ sa courbe représentative.

1) a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = e^{2x}(e^x - 1)$.

c) Dresser le tableau de variation de $f$.

d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \geq 1$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2$.

b) Etudier alors la position de $(C)$ par rapport à la droite $\Delta$: $y = 2$.

c) Etudier les branches infinies de $(C)$

d) Tracer $(C)$ et $\Delta$.

3) Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[0, +\infty[$.

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur $[1, +\infty[$.

b) Construire dans le même repère la courbe $(C')$ de $g^{-1}$.

4) Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{x} + 2x$.

a) Vérifier que $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de $F$.

c) Montrer que l'équation $F(x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha$ et que $0 < \alpha < \ln 4$.

***Exercice 12***

A) Soit $g$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = e^{x} - x - 2$.

1) Dresser le tableau de variation de $g$.

2) a) En déduire qu'il existe un seul réel $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$ et tel que $1 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Déterminer suivant les valeurs de $x$ le signe de $g(x)$.

B) Soit $f$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$ et soit $(C)$ sa courbe représentative.

1) a) Montrer que pour tout réel positif $x$ on a : $f'(x) = \frac{e^{x}}{(1+xe^{x})^{2}} \times g(x)$.

b) Vérifier que pour tout réel positif $x$ on a : $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Vérifier que $(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

d) Dresser le tableau de variation de $f$.

2) a) Préciser une équation cartésienne de la demi tangente $T$ à la courbe $(C)$ au point $O$.

b) Tracer $(C)$ et $T$ ( On prendra $\alpha \simeq 1{,}1$).