FONCTION EXPONENTIELLE 4eme Sc Expérimentales

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^x - 1$.

Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{1}{e}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

1) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α strictement positive. En déduire le signe de $g(x)$ suivant x.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln x$.

a) Etudier la limite de f à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

c) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations de f en admettant que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) Tracer C la courbe représentative de f. On suppose que $\alpha = 0,75$ (unité graph 4 cm).

4) Soit D l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

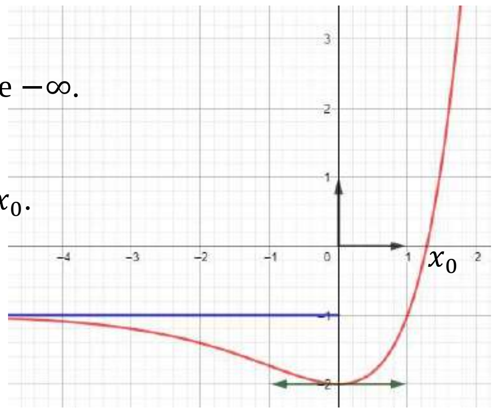
a) Hachurer le domaine D.

b) Calculer l'aire du domaine D.

Exercice 2

1) La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que :



* La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.

* La courbe (Γ) admet une seule tangente horizontale.

* La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses $(O, \vec{\imath})$ en un unique point x_0.

En utilisant le graphique :

a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (\alpha x + \beta)e^x - 1$ où α et β sont deux réels.

a) Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de α et β.

b) Déduire, en utilisant 1)a), que pour tout réel x on a : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Justifier que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O\,,\vec{j}\,)$ au voisinage de $+\infty$

4) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que $f(x_0) = \frac{1}{x_0-1}$.

d) Tracer (C_f). (On prendra $x_0 = 1{,}2$).

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

On désigne par (C_f)la courbe représentative de f.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout réel , $f(x)' = -xe^{-x}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Tracer la courbe (C_f)

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par A_n l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C_f) les axes du repère et la droite d'équation $x = n$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer A_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$. On désigne par (ζ) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que pour tout $x \in IR$, $f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^x}$.

b) Etudier les variations de f.

c) Vérifier que pour tout $x \in IR$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1+e^x)$.

d) En déduire que la droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à (ζ) en $-\infty$.

Etudier la position relative de (ζ) et Δ.

e) Tracer (ζ) et Δ.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans IR une solution unique α.

b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b) En déduire que tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

4) Soit la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$.

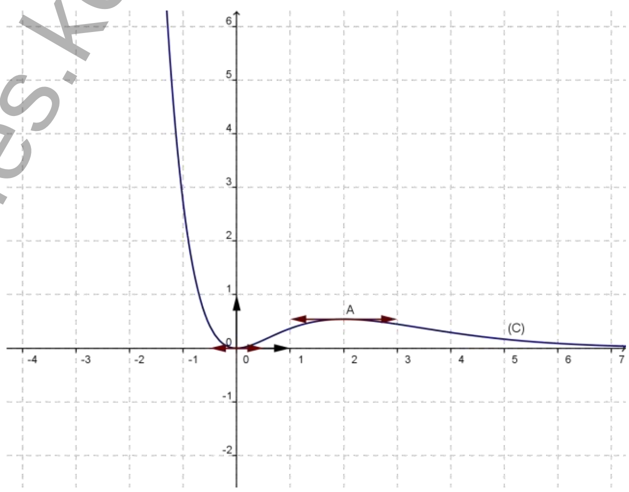
c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 5

I) On a représenté ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur IR.

On sait que la courbe (C) admet :

- Une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.
- Seulement deux tangentes horizontales ; l'une au point O et l'autre au point $A(2, 4e^{-2})$.



En utilisant le graphique :

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) Déterminer, suivant la valeur du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

II) On suppose que la fonction f et définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$. On note f' la fonction dérivée de f.

1) Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x)$.

2) Soit $I = \int_0^2 xe^{-x}dx$ et $J = \int_0^2 f(x)dx$.

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 1 - 3e^{-2}$.

b) En utilisant II-1), montrer que $J = 2I - \int_0^2 f'(x)dx$.

c) En déduire la valeur de J et interpréter graphiquement le résultat

Exercice 6

On a représente ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe (C) d'une fonction f définie, continue, dérivable et strictement décroissante sur $[0\ ,\ +\infty[$.

On sait que la courbe (C) :

* admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$

* atteint son maximum au point d'abscisse 0.

1) Par lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $f'_d(0)$ (nombre dérivé à droite en 0)

b) Montrer que f est une bijection de $[0\ ,\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1} réciproque de f.

On note β l'abscisse du oint d'intersection des deux courbes (C) et (C')

3) On sait que la fonction f est définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $f(x)=(ax+b)e^{-2x}$ .où a et b sont deux réels.

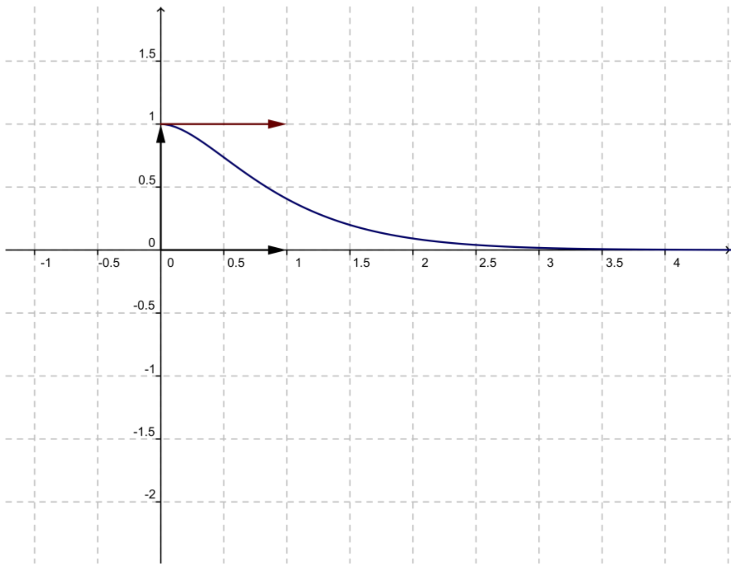
a) En utilisant 1) a) montrer que pour tout x de $[0\ ,\ +\infty[$; $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$.

b) Soit $I=\int_0^{\beta}(2x+1)e^{-2x}\,dx$.

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I=1-(\beta+1)e^{-2\beta}$.

c) On désigne par A l'aire de la partie (E) du plan limité par la courbe (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\beta$ et $x=1$.

Hachurer (E) et déterminer A en fonction de β



Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]0\,,1[$ par : $f(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

2) On désigne par (C) la courbe de g (Unité graphique $4cm$).

a) Montrer que (C) est symétrique par rapport au point $I\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de g.

c) Vérifier que $I \in (C)$ et montrer que la tangente T à (C) en I a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) \leq \frac{1}{4}$.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = g(x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

a) Etudier le sens de variation de h.

b) Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4) Etudier la position de (C) et T.

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}75$.

b) Tracer (C) et T et la courbe (C') de f.

6) Soit G la primitive de g tel que $G(0) = \ln 2$ et $F : x \mapsto \ln(g(x))$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $F(x) = x - G(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de F.

c) Montrer que la droite $D : y = x$ est asymptote à la courbe Γ de F au voisinage de $-\infty$.

d) Préciser la position de Γ par rapport à D. Tracer Γ.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + e^x - xe^x$. On note (ζ) sa courbe représentative.

1) On donne ci- dessous le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

a) Justifier que la restriction g de f à l'intervalle $[0,+\infty[$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,2]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans IR, une solution unique α .

c) Vérifier que $1 < \alpha < 1{,}5$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat .

b) Etudier la position relative de la courbe (ζ) et la droite Δ d'équation $y = x$.

c) Tracer (ζ) et Δ .

3) On note g^{-1} la fonction réciproque de g et (ζ') sa courbe représentative. Tracer (ζ').

4) a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x + (2 - x)e^x$ est une primitive de f sur IR.

b) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (ζ), la droite Δ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

c) En déduire que $\int_1^2 g^{-1}(x)dx = e-2$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer (C).

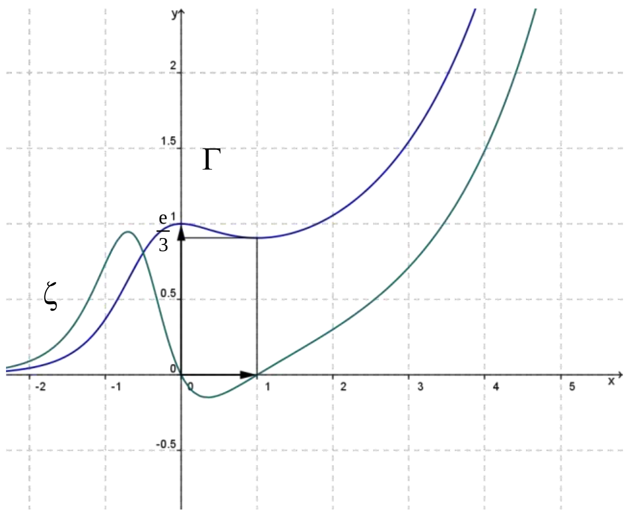
4) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans $]0,+\infty[$.

b) Vérifier que $x_n = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Exercice 10



Dans le graphique ci-contre

ζ et Γ sont les courbes représentatives ,

dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction

f dérivable sur IR et de sa fonction dérivée f'.

Chacune des deux courbes ζ et Γ possède :

* une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

* une asymptote d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$

1) Par une lecture graphique :

a) Déterminer, parmi les courbes ζ et Γ celle qui représente la fonction f'.

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) On admet que la fonction f est définie sur par : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x+x^2}$.

a) Calculer $f'(x)$, pour $x\in IR$.

b) Montrer que pour tout $x \in IR$ on a : $f(x) - f'(x) = f(x)\dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$.

c) En déduire les coordonnées du point d'intersection des deux courbes ζ et Γ.

d) Montrer que pour tout $x \geq -\dfrac{1}{2}$ on a : $f(x) - f'(x) \geq \dfrac{4}{3\sqrt{e}}\dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$.

3) Soit t un réel supérieur ou égale à 1. On désigne par A(t) l'aire de la partie du plan limité par les deux courbes ζ et Γ et les droites : $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = t$

a) Montrer que $A(t) \geq \dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ln(1+t+t^2) - \dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

b) En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t)$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $IR - \{-1\}$ par $f(x) = -1 + \dfrac{x-1}{x+1}e^x$. On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour $x \in IR - \{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x$

b) Donner le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-1, +\infty[$ une unique solution α et que $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

b) Vérifier que $e^\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et que $f(-\alpha) = 0$

4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Tracer la courbe ζ.

Exercice 12

A) On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x - x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative (unité graphique 2cm)

1) a) Montrer que f est continue en 0

b) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 est que le nombre dérivé à gauche en 0 est 2

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

2) a) Etudier les variations de f sur $]-\infty , 0]$ puis sur $]0 , +\infty[$

b) En déduire le tableau de variation de f sur IR

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

b) Préciser pour $x \leq 0$, la position de (C) par rapport à Δ

c) Préciser pour $x > 0$, la position de (C) par rapport à $\Delta' : y = x$

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (C) au point $A(e\ ,\ 0)$

4) Tracer Δ, Δ', T et (C)

B) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1\ ,\ +\infty[$

1) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera. On désigne par (C') la courbe représentative de g^{-1}

b) Vérifier que la droite T définie dans A)3)d) est tangente à la courbe (C') au point $B(0\ ,\ e)$

c) Tracer (C')

2) Soit $I(1\ ,\ 1)$. Calculer en cm^2, l'aire du domaine limité par les axes de coordonnées l'arc $[\ IA\ ]$ de la courbe (C) et l'arc $[\ IB\ ]$ de la courbe (C')

Exercice 13

A) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$

c) Montrer que le point $I\left(0\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C)

d) Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point I

2) a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t) \le \dfrac{1}{2}$

b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente, montrer que pour $x \ge 0$ on a : $f(x) \le \dfrac{1}{2}(x+1)$

c) Déterminer alors la position de (C) par rapport à T

3) Tracer (C) et T

4) a) Montrer que f est une bijection de IR sur $]0\ ,\ 1[$

b) Soit $y \in\ ]0\ ,\ 1[$. Déterminer le réel x tel que $f(x) = y$

c) En déduire la représentation graphique dans le même repère de la fonction g définie sur $]0\ ,\ 1[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

B) On considère la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ définie pour tout entier naturel n non nul par : $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}}\,dt$

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante et positive

b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ est convergente

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $I_n \le \dfrac{1}{2n}$

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

Exercice 14

I) On a représenté ci-dessous, les courbes (C) et (Γ), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur IR et sa fonction dérivée f'.

1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f'.

2) Déterminer $f(0), f'(0), f(-1)$ et $f'(-1)$.

3) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe de f', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

II) La fonction f est définie sur IR par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1) a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 2e - 5$.

b) Déterminer l'aire A' de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α et que $1{,}41 < \alpha < 1{,}42$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en α et que $g^{-1}(\alpha) = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha(1-\alpha)}$, (g^{-1} désigne la fonction réciproque de g).

Exercice 15

I) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^x - x$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) En déduire que pour tout réel x, $e^x - x \ge 1$.

II) Dans la figure ci-dessous est représentée, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_g d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe C_g .

La courbe C_g admet une branche parabolique de direction $(O\ ,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

1) a) Déterminer g(1), g(2) et g(3).

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$

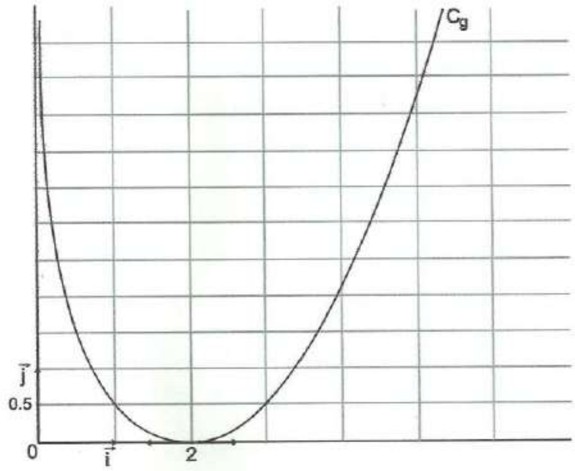
c) Déterminer le signe de $g'(x)$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e^{g(x)}$ et soit C_h sa courbe représentative.

a) Calculer $h(1)$, $h(2)$ et $h(3)$.

b) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$.

c) En écrivant $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{e^{g(x)}}{g(x)}\,\dfrac{g(x)}{x}$, pour $x > 2$ montrer que la courbe C_h admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O\ ,\vec{j})$.



d) Dresse le tableau de variation de g.

3) Soit $\alpha > 0$.

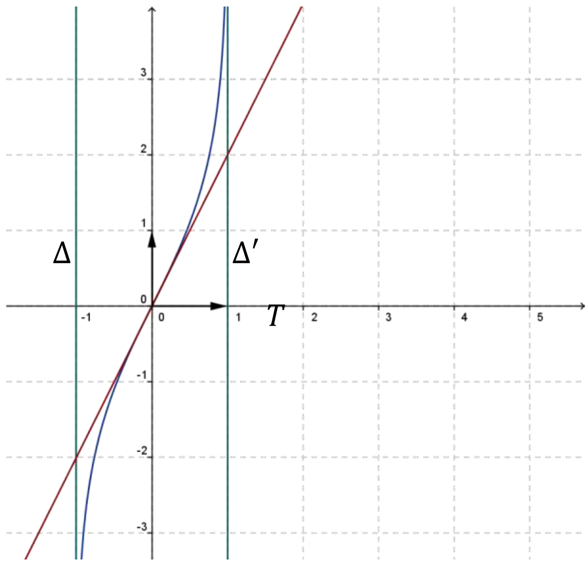
On note M et N les points des courbes C_g et C_h d'abscisse α .

a) Calculer la distance MN en fonction de $g(\alpha)$.

b) Montrer que la distance MN est minimale lorsque $\alpha = 2$.

4) Tracer la courbe C_h .

Exercice 16



On a représenté ci-contre, la courbe (ζ) d'une fonction *f* définie, dérivable et strictement croissante sur $]-1,1[$.

Les droites (Δ) et (Δ') d'équation respectives $x = -1$ et $x = 1$ sont les asymptotes à (ζ) .

La droite (T) est la tangente à (ζ) en O.

1) En utilisant le graphique déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

2) Soit g la fonction réciproque de f et (ζ') sa courbe représentative

a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$

b) Tracer la courbe (ζ')

3) Sachant que l'expression de g est de la forme

$g(x) = \dfrac{e^x + a}{e^x + b}$, pour tout $x \in IR$, montrer en utilisant ce qui précède que $g(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$, pour tout $x\in IR$.

4) a) Vérifier que $\dfrac{1}{e^{x}+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$, pour tout $x\in IR$.

b) Calculer alors $\int_0^1 g(x)\,dx$

5) Soit A l'aire de la partie du plan limitée les courbes (ζ) et (ζ') les droites d'équations $x=1$ et $y=1$

a) Montrer que $A=1-2\int_0^1 g(x)\,dx$.

b) En déduire A.