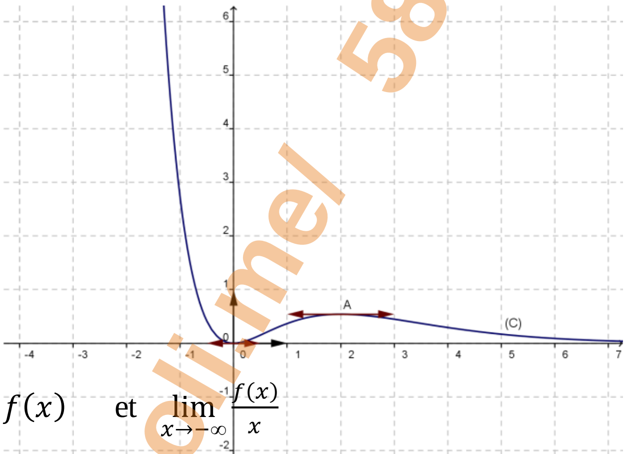
Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

I) On a représenté ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur IR.

On sait que la courbe (C) admet :

- Une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.
- Seulement deux tangentes horizontales ; l'une au point O et l'autre au point $A(2, 4e^{-2})$



En utilisant le graphique :

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Déterminer, suivant la valeur du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

II) On suppose que la fonction f et définie par : $f(x) = x^2e^{-x}$.

1) Vérifier que, pour tout réel x , $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x)$.

2) $Soit\ I = \int_0^2 xe^x\ dx \qquad et \qquad J = \int_0^2 f(x)\ dx$

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 1 - 3e^{-2}$.

b) En utilisant II − 1), montrer que $J = 2I - \int_0^2 f'(x)\ dx$

c) En déduire la valeur de J et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 2

Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^x - 1$.

Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{1}{e} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

1) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α strictement positive. En déduire le signe de $g(x)$ suivant x.

2) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln x$.

a) Etudier la limite de f à droite en 0 . Interpréter le résultat graphiquement.

b) Vérifier que pour tout x de $]0\,,+\infty[\,;f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

c) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations de f en admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) Tracer C la courbe représentative de f. On suppose que $\alpha = 0{,}75$ (unité graph 4 cm).

4) Soit D l'ensemble des points $M(x\,,y)$ tels que $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

a) Hachurer le domaine D.

b) Calculer l'aire du domaine D.

Exercice 3

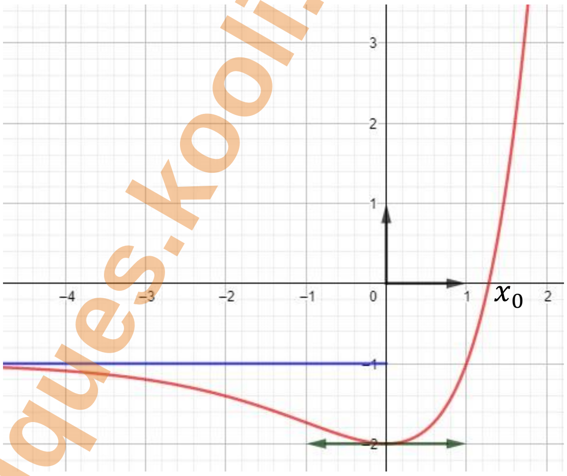
1) La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

* La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.

* La courbe (Γ) admet une seule tangente horizontale.

* La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses $(O\,,\vec{\imath}\,)$ en un unique point x_0.



En utilisant le graphique :

a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (\alpha x + \beta)e^x - 1$ où α et β sont deux réels.

a) Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de α et β.

b) Déduire, en utilisant 1)a), que pour tout réel x on a : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Justifier que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O\,,\vec{\jmath}\,)$ au voisinage de $+\infty$

4) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que $f(x_0) = \frac{1}{x_0-1}$.

d) Tracer (C_f). (On prendra $x_0 = 1{,}2$).

Exercice 4

1) Soit les fonctions h et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$ et $h(x) = e^{-x} - x + 1$.

a) Etudier les variations de h et g puis déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ et que $h(x) \leq 0$.

b) Déduire que pour tout réel $x > 0$, on a : $1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$.

c) Montrer que pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1 - \frac{1}{nx} \leq e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1 - \frac{1}{1+nx}$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n = \displaystyle\int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\right) dt$ et $V_n = nU_n$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_n^{nx} \varphi(t)\ dt$ où $\varphi(t) = 1 - e^{-\frac{1}{t}}$ $\forall t \in \,]0\,,+\infty[$.

a) Vérifier que pour tout réel $x \geq 1$ on a : $F'_n(x) = n\left(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\right)$.

b) Calculer $F_n(1)$ puis déduire que $U_n = \displaystyle\frac{1}{n}\int_n^{2n} \varphi(t)\ dt$.

c) Interpréter graphiquement les termes de chacune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$.

et soit (C_n) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f_n est continue sur $[0\,,+\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.

c) Montrer que f_n est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que $\forall x \in \,]0\,,+\infty[$, $f'_n(x) = \left(1 + \frac{1}{nx}\right)e^{-\frac{1}{nx}}$

d) Dresser le tableau de variation de f_n.

2) On se propose d'étudier la branche infinie de (C_n).

a) Montrer que pour tout $t \in [0\,,+\infty[$, $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$.

b) En déduire que pour $u \in [0\,,+\infty[$, $0 \leq e^{-u} - (1 - u) \leq \frac{u^2}{2}$.

c) Montrer alors que $\forall x \in \,]0\,,+\infty[$, $0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$.

d) Conclure.

3) Tracer la courbe (C_1) et son asymptote en précisant la tangente en 0.

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \int_0^1 f_n(x)\ dx$.

a) Montrer que $\forall x \in [0\,,1]$, $f_n(x) \leq x$. En déduire que $\forall n \geq 1$, $I_n \leq \frac{1}{2}$.

b) En utilisant 2)c) montrer que $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \ln(\tan x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équation :

$x = 0$, $x = \ln(\sqrt{3})$ et $y = 0$.

Exercice 7

1) Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \int_0^x e^{-nt}\ dt$.

a) Montrer que : $V_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{n}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = \frac{1}{n}$.

2) a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout réel $p \geq 0$, $p - \frac{p^2}{2} \leq \ln(1+p) \leq p$.

3) Soit la fonction F_n définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $F_n(x) = \int_0^x e^{-t} \ln(1 + e^{-nt})\ dt$.

a) Montrer que : F_n est croissante sur $[0\,,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ $V_{n+1}(x) - \frac{V_{2n+1}(x)}{2} \leq F_n(x) \leq V_{n+1}(x)$. On pourra utiliser 2)b).

c) Montrer que F_n admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On pose $U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

d) Montrer que tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{4n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

e) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $H_n(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1 + e^{nt}}\ dt$

a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $F_n(x) = \ln 2 - e^{-x} \ln(1 + e^{-nx}) - nH_n(x)$.

b) Déduire que H_n admet une limite finie W_n lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_n = \ln 2$.

Exercice 8

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Etudier la branche infinie de (C_f).

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $f''(x) = \frac{1}{4} \times \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-1)\sqrt{e^x-1}}$ et en déduire que (C_f) admet un pont d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C_f) au point I.

c) Tracer T et (C_f).

3) Soit u la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $u(x) = \ln(1 + tan^2 x)$.

a) Calculer que $u'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Justifier que $u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +\infty[$.

4) Soit la fonction G définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = \int_0^{\ln(1+tan^2 x)} f(t)\, dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G'(x) = tan^2 x$.

b) En déduire une deuxième expression de $G(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Calculer alors $\mathscr{A}$ la mesure de l'aire de de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 0$ et $x = \ln 2$.

Exercice 9

Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (C_n) la courbe de f_n dans le repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\|\vec{\jmath}\| = 10$.

A)

1) a) Dresser le tableau de variation de f_1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, dresser le tableau de variation de f_n.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les positions relatives de (C_{n+1}) et (C_n).

3) On a tracé ci-dessous les courbes (C_1) et (C_3).

a) Sans justification, graduer le repère puis nommer sur le graphique les deux courbes.

b) Tracer soigneusement la courbe (C_2) ainsi que les demi-tangentes à l'origine pour chacune des trois courbes.

B) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = f_n(n)$.

1) a) En utilisant les résultats de la partie **A)** démontrer que (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b) La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

2) a) Montrer que pour tout $t \in [0\,,1]$, on a : $\frac{1}{1+t} \leq 1 - \frac{t}{2}$.

b) Déduire que pour tout $x \in [0\,,1]$, on a : $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{4}$.

c) Prouver alors que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

3) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{U_{k+1}}{U_k} \leq e^{-\frac{1}{4k}}$.

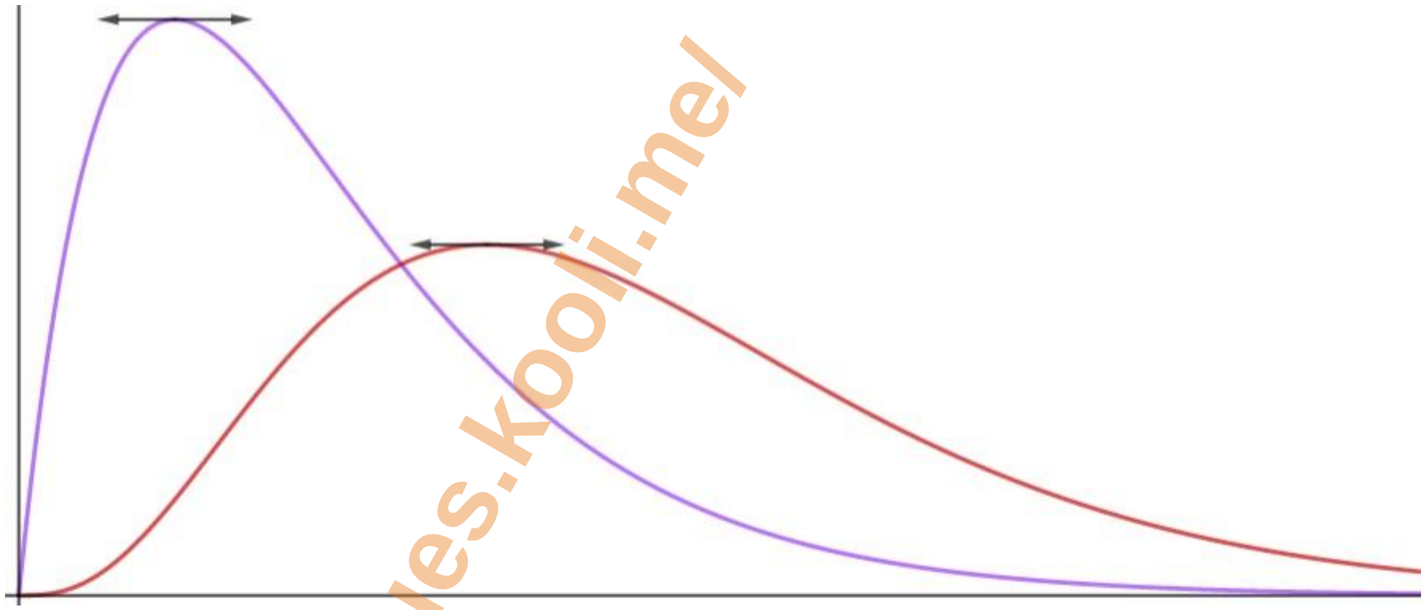
b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, on a : $U_n \leq e^{-\left(1+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)}$

4) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [k, k+1]$ on a : $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ on a : $\int_1^n \frac{dt}{i} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

c) Montrer alors que pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, on a : $U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$.

d) Déterminer alors la limite de suite (U_n)



Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)e^{-x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier les branches infinies de (C_f).

c) Tracer (C_f).

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \int_0^n f(x)\ dx$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = 2 - (n+2)e^{-n}$.

b) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_k = \int_{k-1}^k f(x)\ dx$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \sum_{k=1}^n U_k$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (e-1)ke^{-k} + (e-2)e^{-k}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (e-1)\sum_{k=1}^{n} ke^{-k} + \frac{e-2}{e-1}(1-e^{-n})$.

5) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} ke^{-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$.

Exercice 11

1) Soit la fonction u définie sur IR par : $u(x) = e^x - x$.

   a) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} u(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x)$

   b) Dresser le tableau de variation de u.

   c) En déduire que : $\forall x \in IR$, $u(x) > 0$.

2) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = (2-x)e^x - 1$.

   a) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

   b) Dresser le tableau de variation de g.

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions ; on notera par α la solution qui appartient à l'intervalle $]-\infty, 1]$ et par β l'autre solution.

   d) Fn déduire le signe de $g(x)$ sur IR.

3) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$ on désigne par C_f sa courbe représentative.

   a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ et que $f(\beta) = \frac{1}{\beta-1}$.

   c) Vérifier que $\forall x \in IR$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

   d) Tracer dans un repère orthonormé (unité graphique $2\ cm$) la courbe de f.

On prendra $\alpha = -1{,}1$ et $\beta = 1{,}8$.

4) Soit $\mathscr{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$. Calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-e^{-2x}}$; on désigne par C_f sa courbe représentative.

1) a) Justifier que $\mathbb{R}_+$ est le domaine de définition de la fonction f.

   b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

   c) Etudier les variations de f et tracer sa courbe C_f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de IR_+ sur un intervalle J que l'on déterminera.

   b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f ; calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

   c) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction f^{-1}.

Exercice 13

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$par : $U_n = \int_1^0 \frac{x}{n+e^x}dx$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \leq 0$.

b) Montrer que la suite U est monotone.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in [0\,,1]$ on a : $\frac{x}{n+3} \leq \frac{x}{n+e^x} \leq \frac{x}{n+1}$

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$on a $\frac{-1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{-1}{2(n+3)}$.

e) Déterminer la limite de la suite U.

2) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \sum_{k=1}^{n} |U_k|$

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} \geq \ln(n+4) - \ln 4$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_n \geq \frac{1}{2}[\ln(n+4) - \ln 4]$.

d) Déterminer alors la limite de la suite V.

Exercice 14

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{1-x}$ et soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Etudier les branches infinies de (Γ).

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ interpréter les résultats graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Etudier la position relative de (C_g) et (C_f).

d) Tracer (C_g) et (C_f) dans le même repère.

3) Soit x un réel de l'intervalle $[1\,,+\infty[$ et les points M et N d'abscisse x tel que $M \in (C_f)$ et $N \in (\Gamma)$.

a) Calculer la distance MN en fonction de x.

b) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale.

4) a) Calculer $S(t)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_f) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$ tel que t un réel de l'intervalle $[1\,,+\infty[$.

b) Calculer $\lim_{t\to+\infty} S(t)$.

5) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_1^2 (x-1)^n e^{1-x}\, dx$

a) Calculer U_1.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

6) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)U_n$.

b) Calculer U_2 et U_3.

c) En déduire $I = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2)e^{1-x}\ dx$

Exercice 15

1) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 + xe^x$.

a) Etudier les variations de g sur IR.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur IR.

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + e^x(x-1)$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) Etudier les variations de f sur IR.

b) Montrer que la droite $D : y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et préciser sa tangente au point d'abscisse 1

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR.

b) Tracer dans le même repère la courbe $\mathcal{C}$' de la fonction f^{-1} réciproque de f.

c) Calculer la mesure $\mathcal{A}$ de l'aire du domaine plan :

$\mathcal{D} = \{M(x, y) \in P / -1 \leq x \leq 0\ et\ 0 \leq y \leq f^{-1}(x)\} \cup \{M(x, y) \in P / 0 \leq x \leq 1\ et\ x \leq y \leq f^{-1}(x)\}$

Exercice 16

Soit la suite U définie sur IN^* par : $U_n = \int_0^1 e^{-x}(x-1)^n\ dx$

1) a) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $U_{n+1} - (n+1)U_n = (-1)^{n+1}$.

b) Calculer U_1 et U_2.

2) Pour tout $n \in IN^*$ on pose : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $\frac{e^{-1}}{2n+1} \leq V_n \leq \frac{1}{2n+1}$

b) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : : $\frac{-1}{2n+2} \leq W_n \leq \frac{-e^{-1}}{2n+2}$

c) Déterminer alors la limite de la suite U.

3) a) Montrer que les suite V et W sont monotones.

b) Montrer que les suite V et W sont adjacentes.

Exercice 17

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x}$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) = (x-2)e^{-x}$

2) Etudier le sens de variation de g. Calculer $g(2)$.

3) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) > 0$.

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + xe^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que le point I de (C) d'abscisse 2 est un point d'inflexion de (C).

3) a) Montrer que la droite $D : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) et D.

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat obtenu graphiquement.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que l'équation $f(x) =)0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0{,}5 < \alpha < 1$

5) On note f^{-1} la réciproque de f et soit (C') sa courbe représentative.

a) Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f(1)$ puis $(f^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right)$.

d) Construire (C) et (C') dans le même repère

5) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite D et les droites $x = 0$ et $x = 1$

Exercice 18

1) Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$.

a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C.

b) Préciser la position de C par rapport à la droite $D : y = x$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur $[0\,,+\infty[$.

b) Construire la courbe C' de f^{-1}.

3) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la région du plan comprise entre les courbes C et C'.

4) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - \frac{2}{1+e^x}$ On désigne par (C) sa courbe représentative.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point O.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x}{2} - f(x)$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Préciser la position relative de (C) par rapport à T.

3) Tracer (C) et T.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,,1[$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in\,]-1\,,1[$.

c) Tracer la courbe (C') de f^{-1}.

5) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{1+e^x}$

b) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 20

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,,1]$ par :

$f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1) Etudier les variations de f_n.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution U_n et que $U_n \in\,]0\,,1[$.

On définie ainsi sur IN^*, une suite (U_n).

3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0\,,1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $f_n(U_{n+1}) < 0$.

c) Montrer que la suite (U_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\ln(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$

b) Calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative (unité graphique 2 cm).

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite Δ: $y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$

c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	3	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans IR_+ une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$ (On précisera la demi tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \simeq 0{,}4$)

3) On désigne par (U_n) la suite définie sur IN^* par $U_n = \int_{\alpha}^{1} |f(x)|^n \, dx$

a) Calculer U_1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

c) Montrer que le point $I\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C)

d) Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C)au point I

2) a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t) \leq \frac{1}{2}$

b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente

c) Montrer que pour réel $x \geq 0$ on a : $f(x)) \leq \frac{1}{2}(x+1)$

d) Déterminer alors la position de (C) par rapport à T.

3) Tracer (C) et T

4) Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}} dt$

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive.

b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $I_n \leq \frac{1}{2n}$

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = ln(1+\tan x)$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$

b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4}\,, ln2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8}\,,\frac{ln2}{2}\right)$ sont des points de (C). (On donne $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$)

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = ln2 - f(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[$

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$)

b) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

On a représenté ci- dessous les points A et I dans le repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

3) Tracer la courbe (C) en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite (OA) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite (OA) et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{8}$ et $x = \frac{\pi}{4}$

a) Justifier que S_1 et S_2 ont la même aire.

b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + \tan x)\, dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J.

c) Donner la valeur de $\int_0^{ln2} \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2}\, dx$.