

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

- 1) Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.
 - a) Dresser le tableau de variation de la fonction P .
 - b) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $-2 < \alpha < -1$.
 - c) Dresser alors le tableau de signe $P(x)$.
- 2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+x^3}{1-x^3}$ et soit C_f sa courbe représentative.
 - a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f .
 - b) Montrer que f est dérivable sur D_f et que pour tout $x \in D_f$ on a : $f'(x) = \frac{P(x)}{(1-x^3)^2}$
 - c) Dresser alors le tableau de variation de la fonction f .
- 3) Déterminer les asymptotes de C_f .
- 4) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
 b) Préciser la position de C_f par rapport à T .
 c) Tracer T et C_f . (on prendra $f(\alpha) \simeq -1,1$).

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3+5x}{x^2+3}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer les réels a et b tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2+3}$
 b) Montrer que la fonction f est impaire. Que peut-on déduire pour la courbe C_f ?
- 2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \frac{(1-x^2)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$
 b) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Donner une équation de la tangente T à C_f à l'origine.
- 4) Soit D la droite d'équation $y = -x$.
 - a) Etudier la position de C_f relativement à la droite D .
 - b) Montrer que pour tout réel x non nul on a : $f(x) + x = \frac{8}{x(1+\frac{3}{x^2})}$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x$. Que peut-on déduire pour la courbe C_f ?

- 5) Tracer D , T et C_f .

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-2}{x^2+3}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f
 b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x^2-2x+9)}{(x^2+3)^2}$
 c) Dresser le tableau de variation de f

- 2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = x + 2 - \frac{8}{x^2+3}$
 b) Montrer alors que la droite $D: y = x + 2$ est une asymptote oblique à C_f .
 c) Etudier la position de C_f et D .
- 3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0
 b) Montrer que T est parallèle à D
 c) Etudier la position de C_f et T .
- 4) Tracer T , D et C_f .

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
 b) Montrer que la droite $D: x = 1$ est un axe de symétrie de C_f .
- 2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.
 b) Préciser le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.
 c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 d) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) - (-x + 2) = \frac{-4}{x-1+\sqrt{x^2-2x+5}}$
 b) Montrer que la droite $D_1: y = -x + 2$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.
 c) En déduire que la droite $D_2: y = x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.
- 4) Tracer D_1 , D_2 et C_f .

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]0, 4[$ par : $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Montrer que f est dérivable sur $]0, 4[$ et que $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{4x-x^2})^3}$
- 2) a) Dresser le tableau de variations de f .
 b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $0,9 \leq \alpha \leq 0,99$.
- 3) a) Montrer que le point $A(2, 0)$ est un centre de symétrie de C_f .
 b) Ecrire une équation de la tangente T à C_f en A .
 c) Tracer C_f et T .
- 4) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 4[$ sur $\mathbb{R}$.
 b) Calculer $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
 c) Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 8} - x$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) > 0$
- 2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$
 b) Dresser le tableau de variation de f .
 c) Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $-\infty$
- 3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$
 a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1,6 < \alpha < 1,7$
 b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 b) Etudier les positions relatives de C_f et de la droite $\Delta: y = x$
 c) Construire C_f et Δ .

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $f(x) = -\sqrt{1-x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.
 b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$
 c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) a) Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $-\infty$.
 b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-\infty, 1]$ une unique solution α et que $-2 < \alpha < -1$
 c) Tracer C_f .
- 3) a) Montrer que $\forall]-\infty, 0]$ on a : $f'(x) \leq \frac{1}{2}$
 b) En déduire que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^3}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que $]-\infty, 1]$ est le domaine de définition de f .
 b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$.
 c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement
 d) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 1]$ par $h(x) = f(x) - x$.
 a) Dresser le tableau de variation de h .
 b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 1]$ une unique solution α et que $0 < \alpha < 1$
 c) En déduire le signe de $h(x)$ sur $]-\infty, 1]$.
 d) Etudier les positions relatives de C_f et de la droite $D: y = x$
- 3) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat graphiquement.
 b) Construire C_f et la droite D (unité graphique 3 cm).

- 4) a) Montrer que f réalise une bijection de $] -\infty, 1]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b) La fonction f^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Justifier.
- c) La fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier
- d) En déduire que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Etudier les variations de f .
- b) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 2) Soit f^{-1} la réciproque de f et soit (C') sa courbe.
 - a) Calculer $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ puis $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f^{-1} .
 - c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- 3) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.
 - a) Dresser le tableau de variation de g .
 - b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$
 - c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.
 - d) Etudier la position de C_f et la droite $\Delta: y = x$.
- 4) Construire C_f et (C') .

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Donner le domaine de définition de f .
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+}$
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Montrer que la droite $D: y = -x$ est une asymptote à C_f .
- b) Etudier la position relative de C_f par rapport à D .
- 4) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
- b) Tracer C_f , D et T .
- 5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $] -1, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1,5$
- 6) a) Montrer que f réalise une bijection de $] -1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b) Montrer que f^{-1} la réciproque de f est dérivable sur J .
- c) Calculer en fonction de α ; $(f^{-1})'(\alpha)$.
- d) Tracer la courbe (C') de f^{-1} .