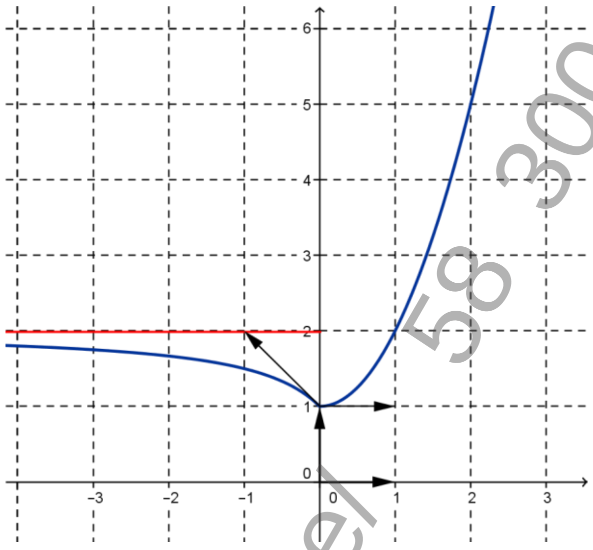
Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

La courbe C_f représentée ci-dessous et celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Déterminer graphiquement les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

2) Déterminer graphiquement $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire la courbe $C_{g^{-1}}$ de g^{-1} puis dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c) Calculer $g^{-1}(2)$ puis $(g^{-1})'(2)$.

d) La fonction g^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

1) Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction P.

b) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $-2 < \alpha < -1$

c) Dresser alors le tableau de signe $P(x)$.

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+x^3}{1-x^3}$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.

b) Montrer que f est dérivable sur D_f et que pour tout $x \in D_f$ on a ; $f'(x) = \frac{P(x)}{(1-x^3)^2}$

c) Dresser alors le tableau de variation de la fonction f.

3) Déterminer les asymptotes de C_f.

4) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position relative de C_f et T.

c) Tracer T et C_f. (on prendra $f(\alpha) \simeq -1,1$)

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3 - \sqrt{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

c) Dresser le tableau de variations de f.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) < 0$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

d) Etudier la position relative de C_f et $\Delta : y = x$

3) a) Montrer que la droite $\Delta_1 : y = x + 3$ est une asymptote à C_f au voisinage $-\infty$

b) Montrer que C_f admet au voisinage $+\infty$ une asymptote oblique Δ_2 que l'on précisera

c) Tracer C_f , Δ , Δ_1 et Δ_2

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 2]$.

b) Montrer que la fonction h^{-1} réciproque de h est continue sur $]-\infty, 2]$ et préciser son sens de variation sur $]-\infty, 2]$.

5) a) Montrer que h^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 2[$.

b) Montrer que h^{-1} n'est pas dérivable à gauche 2.

c) Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-\infty, 2]$.

d) Tracer $C_{h^{-1}}$ courbe représentative de h^{-1}.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-2}{x^2+3}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x^2-2x+9)}{(x^2+3)^2}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = x + 2 - \frac{8}{x^2+3}$

b) Montrer alors que la droite $D : y = x + 2$ est une asymptote oblique à C_f.

c) Etudier la position de C_f et D.

3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0

b) Montrer que T est parallèle à D

c) Etudier la position de C_f et T.

4) Tracer T, D et C_f.

5) Soit la droite Δ: $y = x$; étudier la position de C_f relativement à la droite Δ

7) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a ; $-1 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3+5x}{x^2+3}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer les réels a et b tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2+3}$

b) Montrer que la fonction f est impaire. Que peut-on déduire pour la courbe C_f ?

2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a ; $f'(x) = \frac{(1-x^2)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Donner une équation de la tangente T à C_f à l'origine.

4) Soit D la droite d'équation $D : y = -x$.

a) Etudier la position de C_f relativement à la droite D.

b) Montrer que pour tout réel x non nul on a : $f(x) + x = \frac{8}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + x$. Que peut-on déduire pour la courbe C_f ?

5) Tracer D, T et C_f.

6) Soit la droite Δ: $y = x$; étudier la position de C_f relativement à la droite Δ

7) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a ; $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la droite D: $x = 1$ est un axe de symétrie de C_f.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.

b) Préciser le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

d) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) - (-x + 2) = \frac{-4}{x-1+\sqrt{x^2-2x+5}}$

b) Montrer que la droite D_1: $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

c) **En déduire que la droite $D_2 : y = x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.**

4) **Tracer D_1, D_2 et C_f.**

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+8} - x$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** **Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$**

b) **Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) > 0$**

2) **a)** **Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$**

b) **Dresser le tableau de variation de f.**

c) **Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $-\infty$**

3) **Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$**

a) **Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1,6 < \alpha < 1,7$**

b) **En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.**

c) **Etudier les positions relatives de C_f et de la droite $\Delta : y = x$**

d) **Construire C_f et Δ.**

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $f(x) = -\sqrt{1-x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** **Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.**

b) **Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$**

c) **Dresser le tableau de variation de f.**

2) **a)** **Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $-\infty$.**

b) **Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-\infty, 1]$ une unique solution α et que $-2 < \alpha < -1$**

c) **Etudier la position relative de C_f et $\Delta : y = x$**

d) **Tracer C_f et Δ**

3) **a)** **Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]-\infty, 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.**

b) **En déduire que f admet une fonction réciproque que l'on notera h**

c) **Montrer que h est dérivable sur $]-\infty, 0]$**

d) **Expliciter $h(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$**

4) **Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$**

a) **Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $\alpha \leq U_n \leq \frac{1}{2}$**

b) **Montrer que la suite (U_n) est décroissante**

c) **Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.**

Exercice 9

A) **Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + 1$.**

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que pour tout x $\in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{-12x}{(x^2+4)^2\sqrt{x^2+4}}$.

b) En déduire que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion à la courbe C_f

c) Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4) Tracer la tangente T et C_f

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

On note f^{-1} sa fonction réciproque.

b) Tracer $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.

d) Montrer que pour tout $x \in I$, $f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

B)

1) Montrer que pour tout $\in [0,+\infty[$, $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$

b) En déduire que pour tout $x \in [0,\alpha]$, $f(x) \geq x$.

3) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et soit (C_f) sa courbe représentative

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpreter les resultants graphiquement.

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera

c) Soit f^{-1} la réciproque de f, expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

d) Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0

e) Etudier la position relative de (C_f) et la tangente T.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

c) Etudier la position relative de (C_f) et la droite $\Delta: y = x$

d) Construire (C_f) ; T et Δ

3) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \alpha$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 11

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que $]-\infty , 1]$ est le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty , 1[$.

c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit la fonction h définie sur $]-\infty , 1]$ par $h(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]-\infty , 1]$ une unique solution α et que $0 < \alpha < 1$

c) En déduire le signe de $h(x)$ sur $]-\infty , 1]$.

d) Etudier les positions relatives de C_f et de la droite $D: y = x$

3) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat graphiquement.

b) Construire C_f et la droite D (unité graphique 3 cm).

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty , 1]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) La fonction f^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Justifier.

c) La fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier

d) En déduire que f^{-1} est dérivable sur $[0 , 1[\cup]1 , +\infty[$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $]0 , +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $]0 , +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Soit f^{-1} la réciproque de f et soit (C') sa courbe.

a) Calculer $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ puis $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0\,,+\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

d) Etudier la position de C_f et la droite $\Delta: y = x$.

4) Construire C_f et (C').

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Donner le domaine de définition de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que la droite $D: y = -x$ est une asymptote à C_f.

b) Etudier la position relative de C_f par rapport à D.

4) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

b) Tracer C_f ; D et T.

5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1\,,+\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1,5$

6) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que f^{-1} la réciproque de f est dérivable sur J.

c) Calculer en fonction de α ; $(f^{-1})'(\alpha)$.

d) Tracer la courbe (C') de f^{-1}.

7) Déterminer la primitive F de f sur $]-1\,,+\infty[$ qui s'annule en 1.