Prof: WALID JEBALI
Lycée IBN ROCHD M.Bourguiba

Série N° 16
Études des fonctions

Niveau : 4éme Sc
A.S : 2023/2024

Exercice 1

1. Étudier les variation de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{4-x}$ et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{4-x}$.
   - a. Étudier la position de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f par rapport à $\mathscr{C}_g$
   - b. Étudier les variations de la fonction f

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]-\infty; 4]$.
   Vérifier que $\alpha \in \left]-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right[$

4. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le même repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

5. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, 4]$ une solution unique x_0.
   Vérifier que $x_0 \in \left]\dfrac{7}{4}; \dfrac{9}{4}\right[$.

6. On pose $h(x) = f(4\cos x)$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
   - a. Démontrer que la fonction h réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur J à préciser
   - b. Étudier la dérivabilité de h^{-1} en $\dfrac{1}{4}$
     Calculer $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et déterminer $(h^{-1})'\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$par : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$. $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un ron $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Étudier f puis tracer $\mathscr{C}_f$ dans $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

2.
   - a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$sur un intervalle I à préciser
   - b. Expliciter $f^{-1}(x)$ (fonction réciproque de f), pour tout $x \in I$
   - c. Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ courbe représentative de la fonction f^{-1} dans le même repère

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$une unique solution α et que $\alpha \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$

4) Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \sqrt{f(\tan(x))}$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

b)
   i. Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$; On a : $g(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$
   ii. Déterminer $g'(x)$
   iii. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser

5) a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1; \sqrt{2}[$

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout réel de $]1; \sqrt{2}[$

6) Soit h la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = x + g^{-1}\left(\sqrt{1 + \sin^2 x}\right)$

a) Montrer que h est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis calculer $h'(x)$

b) En déduire que $g^{-1}\left(\sqrt{1 + \sin^2 x}\right) = \frac{\pi}{2} - x$

Exercice 3

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un r.o.n $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) a) Monter que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$. Interpréter graphiquement ces résultats

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}^3}$

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Vérifier que $f\langle[2; 3]\rangle \subset [2, 3]$

e) Montrer que pour tout $x \in [2; 3]$; $|f'(x)| \leq \frac{2}{5\sqrt{5}}$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $]1; 2[$

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0

c) Montrer que $I(0; 1)$ est un centre de symétrie à la courbe $\mathscr{C}_f$

d) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le même repère

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Construire $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.Interpréter graphiquement
   b) Vérifier que: $\forall x\in[0,+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f.
   c) Tracer $\mathscr{C}_f$
2. a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,2[$
   b) Construire la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction réciproque de f dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
   c) Montrer que $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$ $\forall x\in[0,2[$
3. soit h la fonction définie sur $[0,\pi[$ par $h(x)=g(1-\cos x)$
   a) Montrer que $\forall x\in[0,\pi[$ on a : $h(x)=\tan\dfrac{x}{2}$.
   b) Montrer que h réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur $[0,+\infty[$. On note h^{-1} la fonction réciproque de h
   c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\forall x\in[0,+\infty[$ on a $h^{-1}(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$
4. soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty\left[\right.$ par $\varphi(x)=h^{-1}(x)+h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   a) Montrer que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\varphi'(x)=0$
   b) calculer $]0,+\infty[$.En déduire que $\forall x\in[0,+\infty[$ on a $h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\pi-h^{-1}(x)$

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\cos 2x$

1. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur$[-1,1]$.
2. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$, et que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$.
3. Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $H(x)=g^{-1}(\cos x)+g^{-1}(\sin x)$

a) Montrer que H est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $H'(x)$.

b) Calculer $H(0)$.Montrer que H est constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on calculera.

Exercice 6

I) Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Dresser le tableau de variation de f
2. En déduire que f réalise une bijection de sur un intervalle J que l'on déterminera.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ la courbe f de $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} dans le même repère.
4. Expliciter $f^{-1}(x)$

II/Soit h la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$.

1. a) Montrer que pour tout x de $]-1,1[$ $\mathrm{h(x)} = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

   b) Montrer que h admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}$.

   c) Montrer que g est dérivable sur IR et que $g'(x) = \dfrac{2}{\pi\left(1+x^2\right)}$

2. Soit φ la fonction définie sur IR^* par $\varphi(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$

   a) Montrer que φ est dérivable sur IR^* et déterminer $\varphi'(x)$

   b) Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(-1)$

   c) En déduire que si $x < 0$ on a : $\varphi(x) = -1$ et que si $x > 0$ on a : $\varphi(x) = 1$

3. Soit les suites U et V définie sur IN^* par $U_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(g\left(1+\frac{1}{k}\right) + g\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$ et $\mathrm{V}_n = \dfrac{U_n}{n}$

   a) Donner la valeur de $\varphi\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $\mathrm{k} \in IN^*$.

   b) En déduire que $g\left(1+\frac{1}{k}\right) + g\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   c) Montrer que pour tout n de IN^*, $U_n = n - g\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

   d) En déduire que la suite (Vn) converge et déterminer sa limite