

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1)
 - a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f .
 - c) Déterminer les points d'intersections de C_f et l'axe des abscisses et de C_f et l'axe des ordonnées.
 - d) Montrer que la droite $D : x = -1$ est un axe de symétrie de C_f .
- 2)
 - a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse -2 .
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.
 - c) Construire T et C_f dans un même repère.
- 3) Soit la droite $D' : y = -2x + m$ où m est un paramètre réel, déterminer en fonction de m le nombre de points d'intersection de C_f et D' .

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c étant des réels et soit C_f sa courbe représentative. On note $S(-2, -3)$ le sommet de C_f . La courbe C_f admet au point d'abscisse -1 une tangente dont une équation cartésienne est : $y = 2x$.

- 1) Déterminer les réels a, b et c .
- 2) On suppose dans la suite que : $f(x) = x^2 + 4x + 1$.
 - a) Dresser le tableau de variation de f .
 - b) Montrer que la droite $D : x = -2$ est un axe de symétrie de C_f .
 - c) Construire C_f .
- 3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + 4|x| + 1$ et soit C_g sa courbe représentative.
 - a) Montrer que la fonction g est paire.
 - b) Dédire de C_f la représentation graphique de C_g .
 - c) Dresser le tableau de variation de g .

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Déterminer les réels a, b et c pour que f admette des extrema en -1 et en 1 et que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 passe par le point $A(-1, 4)$.
- 2) On suppose dans la suite que : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
 - a) Dresser le tableau de variation de f .
 - b) Préciser les extrema de f .

- 3) a) Montrer que le point $I(0, 1)$ est un centre de symétrie de C_f .
- b) Montrer que le point $I(0, 1)$ est un point d'inflexion de C_f .
- 4) Déterminer les abscisses des points de C_f où la tangente en ces points est parallèle à la droite $\Delta : 9x - y + 2 = 0$.
- 5) Tracer C_f .

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2) Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
- 3) a) Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction g définie sur D_f par : $g(x) = f(x) - x + 1$.
- b) Que peut-on en conclure pour C_f et la droite $\Delta : y = x - 1$.
- c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ .
- 4) Montrer que le point $I(-1, -2)$ est un centre de symétrie de C_f .
- 5) a) Etudier les variations de f .
- b) Tracer C_f .
- 6) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2+3}{|x|+1}$
 - a) Etudier la parité de h .
 - b) Dédire de C_f la représentation graphique de C_h .

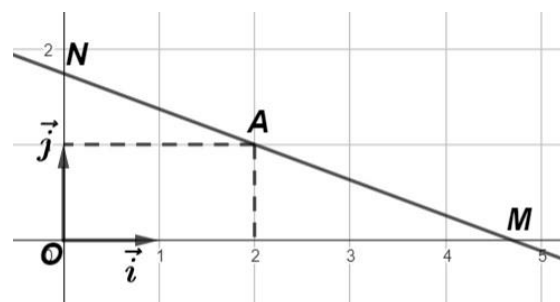
Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ et on désigne par C_f sa courbe représentative

- 1) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ on a : $f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Préciser les extrémums de la fonction f .
- 2) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x + 2$ est une asymptote à C_f et préciser l'autre asymptote.
- b) Etudier les positions relatives de la courbe C_f par rapport à la droite Δ .
- 3) Soit D la droite d'équation : $3x + y - 5 = 0$.
 - a) Déterminer les tangentes à la courbe C_f parallèles à la droite D .
 - b) La droite D est-elle tangente à la courbe C_f .

4) Dans la figure ci-contre on a placé le point $A(2, 1)$.

Pour tout réel $x > 2$, on note M un point de l'axe des abscisses.



La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en un point N .

- a) Montrer que l'ordonnée de N est égale à $\frac{x}{x-2}$
- b) Exprimer, en fonction de $f(x)$ l'aire du triangle OMN .
- c) En déduire la valeur minimale de l'aire du triangle OMN .

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-2}$ avec a et b deux réels. Soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f
b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ on a : $f'(x) = \frac{ax^2-4ax-2b-1}{(x-2)^2}$
c) Déterminer alors a et b pour que C_f admette en $A(1, -1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 3$.
- 2) On admet dans la suite que $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-2}$
a) Montrer que la droite $\Delta: y = x + 1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
b) Déterminer l'autre asymptote à C_f .
- 3) a) Dresser le tableau de variations de f
b) Soit le point $I(2, 3)$ Montrer que I est un centre de symétrie pour C_f
c) Construire C_f .
d) Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Déterminer l'équation de C_f dans $R' = (I, \vec{u}, \vec{j})$.
- 4) a) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation :
 $x^2 - (m+1)x + 2m + 1 = 0$.
b) Dans le cas où la droite $D_m: y = m$ coupe la courbe C_f en deux points distincts M' et M'' , on pose K milieu de $[M'M'']$.

Quel est l'ensemble Δ des points K lorsque m varie ?

- c) Déterminer les réels m tel que $OM'M''$ soit rectangle en O .
- 5) Soit la fonction g définie par $g(x) = |x| + 1 + \frac{3}{|x|-2}$.
- a) Déduire la courbe C_g représentative de g à partir de C_f .
 - b) Etudier graphiquement la dérivabilité de g en 0 .
 - c) Retrouver le résultat par le calcul.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2-4x-1}{x-2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f .
b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- 2) Soient trois réels a , b et c tels que : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
a) Calculer de deux manières $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ en déduire a .

- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)f(x)$ en déduire c .
 - c) Calculer $f(0)$ en déduire b .
 - d) Montrer que la droite $\Delta: y = 2x$ est une asymptote à C_f .
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
 - 4) Montrer que le point $I(2, 4)$ est un centre de symétrie de C_f .
 - 5) Etudier la position de C_f par rapport à Δ .
 - 6) Tracer Δ et C_f .
 - 7) a) Montrer que pour tout réel m C_f coupe la droite $D: y = m$ en deux points distincts M_1 et M_2
 - b) Déterminer les coordonnées du point $I = M_1 * M_2$ en fonction de m
 - c) En déduire l'ensemble des points I lorsque m varie
 - 8) Soit $g(x) = f(-|x|)$ construire C_g à partir de C_f

Exercice 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f
- b) Déterminer les réels a , b et c tel que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$
- c) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et interpréter les résultats graphiquement.
- 2) Dresser le tableau de variations de f .
- 3) Montrer que la droite $\Delta: x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C_f .
- 4) a) Tracer Δ et C_f .
- b) Discuter graphiquement et suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$
- 5) Soit la fonction g définie sur D_f par $g(x) = -f(x)$. Sans étudier la fonction g , tracer sa courbe C_g .
- 6) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = f(n)$
 - a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
 - b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et minorée (on peut utiliser la question 2).
- 7) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
 - a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n = n + 1 - \frac{1}{n+1}$
 - b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 9

- 1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2 - 4x + \beta}{x-1}$ (α, β) $\in \mathbb{R}^2$ et soit C_f sa courbe représentative.
- Déterminer le domaine de définition de f .
 - Calculer $\forall x \in D_f$ et en fonction de α et β $f'(x)$
 - Déterminer les réels α et β pour lesquels f admette un extremum égal à 2 en 3
- 2) On prend par la suite $\alpha = 1$ et $\beta = 7$
- Dresser le tableau de variation de f
 - Préciser la nature des extrema de f .
 - Montrer que le point $I(1, -2)$ est un centre de symétrie de C_f .
- 3) a) Déterminer trois réels a, b et c tel que $\forall x \in D_f$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$
- Montrer que $\Delta: y = x - 3$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
 - Etudier la position de C_f par rapport à Δ .
- 4) Tracer Δ et C_f .
- 5) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions de l'équation $x^2 - (4 + m)x + m + 7 = 0$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- Montrer que f est définie sur $]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$
- Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$.
 - Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et à droite en 4.
 - Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Montrer que la droite $\Delta: x = 2$ est un axe de symétrie de C_f .
- Montrer que les droites $D_1: y = 2x - 4$ et $D_2: y = -2x + 4$ sont des asymptote à C_f respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f .
- Tracer Δ, D_1, D_2 et C_f .
- soit la fonction g définie par $g(x) = f(|x| + 4)$
 - Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que la fonction g est paire.
 - Expliquer comment peut-on déduire C_g à partir de C_f . Tracer C_g .

Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1}$ On désigne par C_f sa courbe représentative

- Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$
- Dresser le tableau de variation de f

- 2) a) Montrer que $D : y = x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$
 b) Etudier la position de C_f et la droite D
 c) Montrer que le point $I(1, 0)$ est un centre de symétrie pour la courbe C_f
 d) Tracer la courbe C_f
- 3) a) Montrer qu'il existe deux tangentes T_1 et T_2 à la courbe C_f qui sont parallèles à la droite d'équation $y = -3x$
 b) Donner des équations réduites de T_1 et T_2
- 3) a) Montrer qu'il existe une unique tangente T à la courbe C_f passant par le point $A(0, -1)$
 b) Donner une équation cartésienne de T et la tracer
- 4) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation :
 $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$
- 5) Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$
 a) Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$
 b) Dresser le tableau de variation de g
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 12

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 et les points $A(1, 0)$ et $B(-1, 0)$

Soit H un point d'abscisse x du segment $[AB]$ et distinct de A et B . La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points M et N

On désigne par f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

- 1) On pose x abscisse du point H
 a) Déterminer l'intervalle à lequel appartient x puis montrer que $OH = |x|$
 b) On désigne par $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle AMN

Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a : $\mathcal{A}(x) = f(x)$

- 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1 et interpréter les résultats graphiquement
 b) Montrer que f est dérivable sur $] -1, 1[$ et que $\forall x \in] -1, 1[$ on a $f'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$
 c) Dresser le tableau de variation de f
 d) Montrer que si l'aire $\mathcal{A}(x)$ est maximale alors le triangle AMN est équilatéral
- 3) Tracer (C_f) courbe représentative de f
- 4) Soit $\Gamma = \{M(x, y) \in P / y^2 = -(1-x^2)^2(1-x^2) = 0\}$
 a) Montrer que $\Gamma = (C_f) \cap (C')$ où (C') est une courbe que l'on précisera
 b) Tracer Γ dans le même repère que (C_f) .