Etude de fonctions 3ème Mathématiques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** **Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.**

b) **Dresser le tableau de variation de f.**

c) **Déterminer les points d'intersections de C_f et l'axe des abscisses et de C_f et l'axe des ordonnées.**

d) **Montrer que la droite $D : x = -1$ est un axe de symétrie de C_f.**

2) **a)** **Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse -2.**

b) **Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.**

c) **Construire T et C_f dans un même repère.**

3) **Soit la droite $D' : y = -2x + m$ où m est un paramètre réel, déterminer en fonction de m le nombre de points d'intersection de C_f et D'.**

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c étant des réels et soit C_f sa courbe représentative. On note $S(-2, -3)$ le sommet de C_f. La courbe C_f admet au point d'abscisse -1 une tangente dont une équation cartésienne est : $y = 2x$.

1) **Déterminer les réels a, b et c.**

2) **On suppose dans la suite que : $f(x) = x^2 + 4x + 1$.**

a) **Dresser le tableau de variation de f.**

b) **Montrer que la droite $D : x = -2$ est un axe de symétrie de C_f.**

c) **Construire C_f.**

3) **Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^2 + 4|x| + 1$ et soit C_g sa courbe représentative.**

a) **Montrer que la fonction g est paire.**

b) **Déduire de C_f la représentation graphique de C_g.**

c) **Dresser le tableau de variation de g.**

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où a b et c sont des réels et soit C_f sa courbe représentative.

1) **Déterminer les réels a b et c pour que f admette des extrema en -1 et en 1 et que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 passe par le point $A(-1, 4)$.**

2) **On suppose dans la suite que : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.**

a) **Dresser le tableau de variation de f.**

b) Préciser les extrema de f.

3) **a)** Montrer que le point $I(0\,,1)$ est un centre de symétrie de C_f.

b) Montrer que le point $I(0\,,1)$ est un point d'inflexion de C_f.

4) Déterminer les abscisses des points de C_f où la tangente en ces points est parallèle à la droite $\Delta : 9x - y + 2 = 0$.

5) Tracer C_f.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

3) **a)** Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction g définie sur D_f par : $g(x) = f(x) - x + 1$.

b) Que peut-on en conclure pour C_f et la droite $\Delta : y = x - 1$.

c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

4) Montrer que le point $I(-1\,,-2)$ est un centre de symétrie de C_f.

5) **a)** Etudier les variations de f.

b) Tracer C_f.

6) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2+3}{|x|+1}$

a) Etudier la parité de h.

b) Déduire de C_f la représentation graphique de C_h.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ et on désigne par C_f sa courbe représentative dans repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

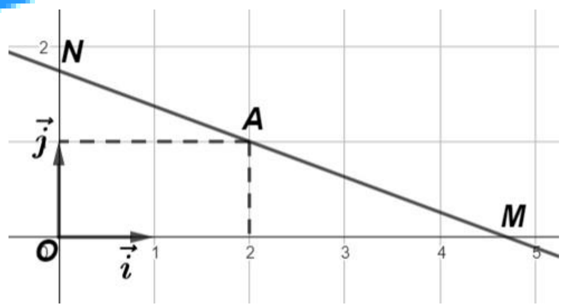
1) **a)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ on a : $f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Préciser les extrémums de la fonction f.

2) **a)** Montrer que la droite $\Delta : y = x + 2$ est une asymptote à C_f et préciser l'autre asymptote.

b) Etudier les positions relatives de la courbe C_f par rapport à la droite Δ.



3) Soit D la droite d'équation : $3x + y - 5 = 0$.

a) Déterminer les tangentes à la courbe C_f parallèles à la droite D.

b) La droite D est-elle tangente à la courbe C_f.

4) Dans la figure ci-contre on a placé le point $A(2\,,1)$.

Pour tout réel $x > 2$, on note M un point de l'axe des abscisses.

La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en un point N.

a) Montrer que l'ordonnée de N est égale à $\frac{x}{x-2}$

b) Exprimer, en fonction de $f(x)$ l'aire du triangle OMN.

c) En déduire la valeur minimale de l'aire du triangle OMN.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-2}$ avec a et b deux réels.

On désigne par C_f sa courbe représentative

1) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ on a : $f'(x) = \frac{ax^2-4ax-2b-1}{(x-2)^2}$.

c) Déterminer alors a et b pour que C_f admette en $A(1\,,-1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation y=-2x+3.

2) On admet dans la suite que $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-2}$

a) Montrer que la droite Δ: $y = x + 1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ *et* $-\infty$.

b) Déterminer l'autre asymptote à C_f.

3) a) Dresser le tableau de variations de f

b) Soit le point $I(2\,,3)$ Montrer que I est un centre de symétrie pour C_f

c) Construire C_f .

d) Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ .Déterminer l'équation de C_f dans R'= $(I, \vec{u}, \vec{j})$.

4) a) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation :

$x^2 - (m+1)x + 2m + 1 = 0$.

b) Dans le cas où la droite D_m: $y = m$ coupe la courbe C_f en deux points distincts M' et M'', on pose K milieu de [M'M''].

Quel est l'ensemble Δ des points K lorsque m varie ?

c) Déterminer les réels m tel que OM'M'' soit rectangle en O.

5) Soit la fonction g définie par $g(x) = |x| + 1 + \frac{3}{|x|-2}$.

a) Déduire la courbe C_g représentative de g à partir de C_f.

b) Etudier graphiquement la dérivabilité de g en 0 .

c) Retrouver le résultat par le calcul.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2-4x-1}{x-2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2) Soient trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

a) Calculer de deux manière $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ en déduire a.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)f(x)$ en déduire c.

c) Calculer $f(0)$ en déduire b.

d) Montrer que la droite Δ: $y = 2x$ est une asymptote à C_f.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que le point $I(2\,,4)$ est un centre de symétrie de C_f.

5) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

6) Tracer Δ et C_f.

7) a) Montrer que pour tout réel m C_f coupe la droite D : $y = m$ en deux points distincts M_1 et M_2

b) Déterminer les coordonnées du point $I = M_1 * M_2$ en fonction de m

c) En déduire l'ensemble des points I lorsque m varie

8) Soit $g(x) = f(-|x|)$ construire C_g à partir de C_f

Exercice 8

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2-4x++\beta}{x-1}$ $(\alpha\,,\beta) \in IR^2$ et soit C_f sa courbe représentative

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Calculer $\forall x \in D_f$ et en fonction de α et β $f'(x)$

c) Déterminer les réels α et β pour lesquels f admette un extremum égal à 2 en 3

2) On prend par la suite $\alpha = 1$ et $\beta = 7$

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Préciser la nature des extrema de f.

c) Montrer que le point $I(1\,,-2)$ est un centre de symétrie de C_f.

3) a) Déterminer trois réels a ,b et c tel que $\forall x \in D_f$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

b) Montrer que Δ: $y = x - 3$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

4) Tracer Δ et C_f.

5) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions de l'équation

$x^2 - (4+m)x + m + 7 = 0$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\sqrt{x^2-4x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que f est définie sur $]-\infty\,,0] \cup [4\,,+\infty[$

2) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,,0[\cup]4\,,+\infty[$.

c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et à droite en 4.

d) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) Montrer que la droite Δ: $x = 2$ est un axe de symétrie de C_f.

4) Montrer que les droites D_1; $y = 2x - 4$ et D_2; $y = -2x + 4$ sont des asymptote à C_f respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer Δ, D_1, D_2 et C_f.

7) soit la fonction g définie par $g(x) = f(|x| + 4)$

a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction g est paire.

c) Expliquer comment peut-on déduire C_g à partir de C_f. Tracer C_g.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$ On désigne par C_f sa courbe représentative

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que D : $y = x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position de C_f et la droite D

c) Montrer que le point $I\ (1, 0)$ est un centre de symétrie pour la courbe C_f

d) Tracer la courbe C_f

3) a) Montrer qu'ils existent deux tangentes T_1 et T_2 à la courbe C_f qui sont parallèles à la droite d'équation $y = -3x$

b) Donner des équations réduites de T_1 et T_2

3) a) Montrer qu'il existe une unique tangente T à la courbe C_f passant par le point $A(0, -1)$

b) Donner une équation cartésienne de T et la tracer

4) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation :
$x^2 - (m + 1)x + m + 4 = 0$

5) Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$

a) Montrer que g est dérivable sur $]1 ; +\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de g

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 11

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 et les points $A(1, 0)$ et $B(-1, 0)$

Soit H un point d'abscisse x du segment $[AB]$ et distinct de A et B. La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux point M et N

On désigne par f la fonction définie sur $[-1\,,1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

1) On pose x abscisse du point H

a) Déterminer l'intervalle à lequel appartient x puis montrer que $OH = |x|$

b) On désigne par $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle AMN

Montrer que pour tout $x \in]-1\,,1[$ on a : $\mathcal{A}(x) = f(x)$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1 et interpréter les résultats graphiquement

b) Montrer que f est dérivable sur $]-1\,,1[$ et que $\forall x \in]-1\,,1[$ on a $f'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Montrer que si l'aire $\mathcal{A}(x)$ est maximale alors le triangle AMN est équilatéral

3) Tracer (C_f) courbe représentative de f

4) Soit $\Gamma = \{M(x,y) \in P / y^2 = -(1-x^2)^2(1-x^2) = 0\}$

a) Montrer que $\Gamma = (C_f) \cap (C')$ où (C') est une courbe que l'on précisera

b) Tracer Γ dans le même repère que (C_f)