

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f .
 b) Déterminer les points d'intersections de C_f et l'axe des abscisses et de C_f et l'axe des ordonnées.
 c) Montrer que la droite $D : x = -1$ est un axe de symétrie de C_f .
- 2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse -2 .
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.
 c) Construire T et C_f dans un même repère.
- 3) Soit la droite $D' : y = -2x + m$ où m est un paramètre réel, déterminer en fonction de m le nombre de points d'intersection de C_f et D' .
- 4) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + 2|x| - 3$ et soit C_g sa courbe représentative.
 a) Montrer que la fonction g est paire.
 b) Dédire de C_f la représentation graphique de C_g .
 c) Dresser le tableau de variation de g .

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c étant des réels et soit C_f sa courbe représentative. On note $S(-2, -3)$ le sommet de C_f . La courbe C_f admet au point d'abscisse -1 une tangente dont une équation cartésienne est : $y = 2x$.

- 1) Déterminer les réels a, b et c .
- 2) On suppose dans la suite que : $f(x) = x^2 + 4x + 1$.
 a) Dresser le tableau de variation de f .
 b) Montrer que la droite $D : x = -2$ est un axe de symétrie de C_f .
 c) Construire C_f .
- 3) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^2 + 4|x| + 1$ et soit C_g sa courbe représentative.
 a) Montrer que la fonction g est paire.
 b) Dédire de C_f la représentation graphique de C_g .
 c) Dresser le tableau de variation de g .

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ et soit C_f sa courbe représentative

- 1) a) Montrer que f est dérivable sur IR puis calculer $f'(x) \forall x \in IR$
 b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que C_f admet un point d'inflexion I

3) Tracer C_f

4) Soit la droite $\Delta_m : y = mx + 9$

Etudier suivant les valeurs de le nombre de d'intersection de C_f et Δ_m

Exercice 4

1) On donne ci-contre le tableau de variation d'une

fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{ax^2 + 4x + b}{(x-1)^2}$

où a et b sont deux réels. La courbe C_g de g

coupe l'axe (O, \vec{j}) en un point $A(0, -3)$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b) Déterminer alors les réels a et b

c) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $g(x) < 0$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x-1}$ et soit C_f sa courbe représentative

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $f'(x) = -g(x)$

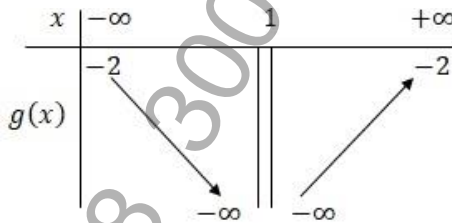
b) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

b) Etudier la position relative de Δ et C_f

c) Montrer que le point $I(1, 1)$ est un centre de symétrie de C_f

d) Tracer C_f et Δ



Exercice 5

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $\begin{cases} f(x) = \frac{2x+2}{1-x} & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = x^2 + 3x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) Montrer que f est continue en -1

2) a) Etudier la dérivabilité de f en -1

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse -1

3) a) Calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

4) Tracer C_f .

5) Existe-t-ils des points des C_f où la tangente à C_f est parallèle à la droite $\Delta : y = \frac{1}{4}x - 1$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$, où a et b sont des réels.

1) Déterminer les réels a et b pour que f admette un extremum égal à -6 en $x_0 = 2$.

2) On suppose dans la suite que : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2$.

a) Dresser le tableau de variation de f .

- b) Préciser les extrema de f .
- 3) Déterminer les abscisses des points de C_f où la tangente en ces points est parallèle à la droite $\Delta : 4x + y - 1 = 0$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 3x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
 et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Etudier la continuité de f en 1.
 - b) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f en 1.
 - b) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty, 1[$ et $] 1, +\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.
 - c) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Déterminer le point A de la courbe C_f où la tangente en A est parallèle à la droite $\Delta : y = -2x + 3$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ On désigne par C_f la courbe représentative de f .

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
- 3) a) Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction g définie sur D_f par : $g(x) = f(x) - (x - 1)$.
 - b) Que peut-on en conclure pour C_f et la droite $\Delta : y = x - 1$.
 - c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ .
- 4) Montrer que le point $I(-1, -2)$ est un centre de symétrie de C_f .
- 5) a) Etudier les variations de f .
 - b) Tracer C_f .
- 6) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2+3}{|x|+1}$
 - a) Etudier la parité de h .
 - b) Déduire de C_f la représentation graphique de C_h .

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ et soit C_f sa courbe représentative

- 1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
 - b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.
- 2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 1, f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$
 - b) En déduire que la droite $D : y = x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $(-\infty)$ et au voisinage de $(+\infty)$
 - c) Etudier la position de C_f par rapport à D

3) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Montrer que le point $I(1, 1)$ est un centre de symétrie de C_f .

5) Tracer C_f et ses asymptotes.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ On désigne par C_f la courbe représentative de f .

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x+1}$

b) En déduire que $\Delta: y = x + 3$ est une asymptote oblique à C_f .

c) Déterminer l'autre asymptote D à C_f .

4) a) Etudier la position relative de C_f et Δ

b) Montrer que le point $I(1, 4)$ est un centre de symétrie de C_f .

5) Tracer D ; Δ et C_f .

6) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x^2 + 2|x| - 2}{|x| - 1}$ On désigne par C_g sa courbe représentative

a) Déterminer le domaine de définition D_g de g .

b) Etudier la parité de g .

c) En déduire la construction de C_g à partir de C_f

Exercice 11

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{4x-4}{x^2-2x+2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

b) Déterminer les limites aux bornes de D_f et interpréter les résultats graphiquement.

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) a) Montrer que le point $I(1, 0)$ est un centre de symétrie de C_f .

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point I

4) Etudier la position de C_f par rapport à T . Puis tracer T et C_f .

5) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions de l'équation $f(x) = m$

Exercice 12

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{x - 1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$

- b) Dresser le tableau de variations de f .
 - c) Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'équation $f(x) = 0$.
 - d) En déduire du tableau de variations de f le signe de f .
- 3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x-1}$
- b) En déduire que $\Delta: y = -x - 2$ est une asymptote oblique à C_f .
 - c) Déterminer l'autre asymptote à C_f .
- 4) Déterminer les abscisses des points de C_f où la tangente est perpendiculaire à la droite $D : y = -\frac{1}{6}x$

Exercice 13

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 - c) Interpréter graphiquement le résultat
- 2) a) Déterminer trois réels a, b et c tel que $\forall x \in D_f ; f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
- b) Montrer que $\Delta: y = x - 1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
- 3) a) Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} ; f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) a) Montrer que $I(2, 1)$ est un centre de symétrie de C_f .
- b) Etudier la position de C_f par rapport à Δ . Puis construire C_f et ses asymptotes Δ et Δ'

Exercice 14

- 1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2 - 4x + \beta}{x - 1}$ (α, β) $\in \mathbb{R}^2$ et soit C_f sa courbe représentative
- a) Déterminer le domaine de définition de f
 - b) Calculer $\forall x \in D_f$ et en fonction de α et β $f'(x)$
 - c) Déterminer les réels α et β pour lesquels f admette un extremum égal à 2 en 3
- 2) On prend par la suite $\alpha = 1$ et $\beta = 7$
- a) Dresser le tableau de variation de f
 - b) Préciser la nature des extrema de f .
 - c) Montrer que le point $I(1, -2)$ est un centre de symétrie de C_f .
- 3) a) Déterminer trois réels a, b et c tel que $\forall x \in D_f ; f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$
- b) Montrer que $\Delta: y = x - 3$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
 - c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ .
- 4) Tracer Δ et C_f .
- 5) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions de l'équation $f(x) = m$